УДК 531.31; 531.36; 531.44 DOI:10.18324/2077-5415-2025-1-68-76

Причины возникновения “парадоксов” Пенлеве при исследовании механических систем с сухим трением

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Статья поступила 03.02.2025, принята 28.02.2025

Даны объяснения причин, приводящих к ошибочным заключениям, которые принято называть парадоксами Пенлеве. Такие парадоксы вносят сомнения в справедливость применяемых принципов классической механики. Возникал вопрос о границах допустимости считать реальные тела абсолютно твердыми, а при нахождении силы трения – на сколько точен закон Амонтона-Кулона. Желание разобраться с парадоксами привело к дискуссии известных ученых – Л. Лекорню, М. де Спарра, Ф. Пфейфера, Ф. Клейна, Р. Мизеса, Л. Прандтля, Г. Гамеля и самого П. Пенлеве. И в наши дни, спустя уже более ста лет, этот вопрос остается актуальным. Механические системы принято описывать при обычном не столь большом трении, а найденные решения распространялись и на случаи большого трения. Считается, что вид исходных уравнений будет одинаков при разных силах трения, в том числе и при очень больших. Такой подход ошибочен и является главной причиной обнаружения парадоксов. Расчетные схемы для моделей с обычным и большим трением могут отличаться друг от друга, а значит уравнения и найденные решения – тоже. Например, сильный удар, возникающий из-за трения, может прервать или изменить контакт соприкасающихся тел. В случаях с двухсторонними связями такой удар может приводить к смене опорной поверхности, а с односторонними – к кратковременной или полной потере контакта тела с опорой. Без учета этого расчетные схемы и описание моделей были не полными. Не случайно, что все известные парадоксы Пенлеве фиксировались при большом трении. Пути исправления допускаемых ошибок показано на таких классических примерах: тормозная система, Пенлеве-Клейна, Пенлеве-Аппеля и трость Бегена. Полученные результаты говорят о том, что парадоксы Пенлеве фиксировались ошибочно из-за неучтенных особенностей систем с сухим трением и являются весьма распространенным заблуждением.

Ключевые слова: сухое трение; закон Амонтона-Кулона; парадоксы Пенлеве; удар трением; пример Пенлеве-Клейна; пример Пенлеве-Аппеля; тормозная система; трость Бегена.

The causes of the “paradoxes” of Painleve in the study of mechanical systems with dry friction

V.A. Koronatov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Received 03.02.2025, accepted 28.02.2025

Explanations of the reasons leading to erroneous conclusions, which are commonly referred to as the Painleve paradoxes, are given. Such paradoxes are in doubt on the validity of the applied principles of classical mechanics. The question arose about the limits of the acceptability of considering real bodies as absolutely solid, and when determining the friction force, how accurate the Amonton-Coulomb law is. The desire to understand the paradoxes led to a discussion by well-known scientists – L. Lecorny, M. de Sparr, F. Pfeiffer, F. Klein, R. Mises, L. Prandtl, G. Hamel and P. Painleve himself. Even today, more than a hundred years later, this issue remains relevant. It is customary to describe mechanical systems with ordinary not so large friction, and the solutions found extended to cases of high friction. It is assumed that the form of the initial equations will be the same for different friction forces, including very large ones. This approach is erroneous and is the main reason for the detection of paradoxes. The calculation schemes for models with normal and high friction may differ from each other, which means that the equations and the solutions found are the same. For example, a strong impact caused by friction can interrupt or change the contact of the touching bodies. In cases with two-way connections, such an impact can lead to a change in the support surface, and with one-way connections, to a short-term or complete loss of body contact with the support. Without taking this into account, the calculation schemes and model descriptions are incomplete. It is no coincidence that all the well-known Painleve paradoxes are fixed under high friction. The ways to correct mistakes are shown in such classic examples as the brake system, the Painleve-Klein, Painleve-Appel and the Beghin cane. The results obtained suggest that the Painleve paradoxes are recorded erroneously due to the unaccounted features of systems with dry friction and are a very common misconception.

Keywords: dry friction; Amonton-Coulomb law; Painleve paradoxes; impact by friction; Painleve-Klein example; Painleve-Appel example; braking system; Beghin cane.

Введение. “Парадоксы Пенлеве” названы в честь французского математика, механика и политика Поля Пенлеве (1863–1933). Интересно заметить, что Пенлеве был премьер-министром Франции в октябре 1917 г., как раз в то время, когда в России произошел октябрьский социалистический переворот. О парадоксах заговорили после выхода в 1895 г. книги П. Пенлеве «Лекции о трении» [1]. В ней приведены восемь систем с сухим трением, на примере которых показано, к каким противоречивым результатам можно прийти, если строго соблюдать существующие принципы и законы механики. Готовясь к лекциям для парижских студентов, ученый обнаружил, что для некоторых простых систем с трением уравнения движения, составляемые по общим правилам механики, неразрешимы. Кроме того, была замечена сильная зависимость поведения таких систем от малых, трудно определяемых параметров. Спустя 10 лет после издания книги это вызвало оживленную дискуссию среди ведущих ученых того времени [1–7] – П. Пенлеве, Л. Лекорню, М. де Спарра, Ф. Пфейфера, Ф. Клейна, Р. Мизеса, Л. Прандтля, Г. Гамеля. Вот уже более ста лет идет обсуждение этой проблемы, не утихая и в наши дни. Например, в работах российских ученых С.С. Григоряна, Ю.И. Неймарка, Н.А. Фуфаева, Н.В. Бутенина, В.Ф. Журавлева, В.В. Козлова [8–17]. Но до сих пор ни для одной из систем, предложенных Пенлеве, так и не было найдено убедительных объяснений возникающим парадоксам. Некоторые из наиболее обсуждаемых систем – Пенлеве-Клейна, Пенлеве-Аппеля и тормозная колодка, стали считаться классическими. Из-за обнаруженных парадоксов впервые встал вопрос о правомерности модели абсолютно твердого тела и точности закона Амонтона-Кулона, используемых в классической механике.

Под парадоксами Пенлеве принято понимать случаи, когда из дифференциальных уравнений движения системы при определенных параметрах искомое решение либо вообще не находится, либо предполагает неоднозначность найденных решений без указаний выбора нужного варианта. А также случаи, когда реакция становится бесконечно большой величиной или изменяет свой знак и направление на противоположный со стороны односторонней связи (опоры). К настоящему времени в данном вопросе сформировались такие подходы:

– отказаться от моделей абсолютно твердого тела, вводя для них хотя бы частично упругость [18–22];
– уточнить формулировку закона Амонтона-Кулона, считая его неточным [1, 8, 17, 23–26];
– учитывать возможность удара трением [18, 19, 27, 28];
– искать критерии возникновения парадоксов ввиду невозможности их исключения [29];
–проверять экспериментально возможность парадоксов [29, 30];
– использовать специальные математические методы для сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, к которым можно прийти при описании таких систем [9–11, 31–37].

Но ни один из названных подходов не предполагал решение проблемы в целом, считая это невозможным. Исходные уравнения для рассматриваемых систем ввиду их простоты и очевидности не подвергались сомнениям. Сомнения вызывали лишь парадоксальные результаты, которые возникали, когда коэффициент трения превышал некоторое критическое значение. Существующие работы посвящались либо объяснению таких результатов, либо поиску уточнений для используемых принципов и существующих моделей. Чтобы избегать парадоксы Пенлеве, исходная система часто подменялась другой, где вводились тела, наделенные упругими свойствами [9–12, 19–22]. Сложилось мнение [1–7, 9–12, 18–20, 36], что для подобных систем возникновение указанных некорректностей просто неминуемо, являясь неизбежной платой за допущенную идеализацию в моделировании скольжения реальных тел.

В данной работе дается объяснение причин, которые вызывают парадоксы Пенлеве. Подчеркивается, что их обнаружение связано с ошибками и неточностями, допускаемыми из-за пренебрежения отличиями систем с сухим трением от обычных, где нет трения. Использовались неполные расчетные схемы, где не принималась во внимание возможность влияния сильного удара трением на контактирующие тела, приводящего к изменению их взаимодействия. Приводится перечень допускаемых ошибок, исправление которых показано на конкретных примерах. В качестве них выбраны наиболее известные: тормозная система, Пенлеве-Клейна, Пенлеве-Аппеля, трость Бегена. Считается, что все рассматриваемые тела абсолютно твердые, а закон о трении используется в общепринятой формулировке Амонтона-Кулона – точно также, как это допускалось П. Пенлеве в его системах.

Показано, что введение уточняющих расчетных схем, где принимается во внимание влияние ударов трением большой силы, позволяет обоснованно говорить об отсутствии парадоксов Пенлеве.

Определения и общие замечания. Вначале сделаем следующие определения.

– Двухсторонняя связь – это две параллельные плоские направляющие поверхности, которые допускают прямолинейное поступательное скольжение тела (ползуна) с сохранением контакта с ними.
– Системами Пенлеве назовем системы с сухим трением, для которых обнаруживается то, что было принято называть парадоксами Пенлеве.
– Качественно новое состояние системы – такое, когда в результате сильного удара трением скольжение одного из тел прерывается полным отрывом от опоры, если она является односторонней связью, или приводит к смене опорной направляющей – для двухсторонней связи.
– Триггерными элементами назовем такие тела, движение которых определяет переход системы из первоначального в качественно новое состояние. Это своего рода сигнальные указатели подобных переходов. Наличие таких элементов характерно для систем Пенлеве.
– Спусковая реакция – это реакция, способная неограниченно возрастать и создавать возможность возникновения сильного удара трением, определяющего переход системы в качественно новое состояние.

Прежние расчетные системы не учитывали возможность нового качественного состояния для систем Пенлеве, их описание при большом трении отдельно не делалось и поэтому расчетные схемы были неполные. Что и приводило к парадоксальным результатам. Возможность перехода системы в качественно новое состояние можно определять по аналитическому виду спусковых реакций опор, действующие на триггерные элементы. Можно заметить, что в системах Пенлеве такие реакции нелинейно выражаются через коэффициент трения f и имеют такой вид:

$$N = \frac{G}{a - fb}, \qquad (1)$$

где G – задаваемая или определяемая прижимная сила тела к опорной поверхности; a,b – параметры, характеризующие систему. Для коэффициента трения область допустимых значений определяется условием: $f < f_*$, где $f_* = a/b$ – будет называться критическим значением коэффициента трения ($N \to \infty$ при $f \to f_*$).

Формула (1) получается, как правило, из уравнения баланса моментов сил для триггерных элементов системы Пенлеве, когда $f < f_*$. Такое уравнение составляется для систем с обычным, не столь большим трением. Но в реальных системах коэффициент трения может превышать критическое значение, т. е. $f \geq f_*$, когда уравнение баланса моментов нарушается. Возникал вопрос о том, как находить реакцию N и силу трения $F = fN$ при $f \geq f_*$. Применение формулы (1) в таких случаях приводит к неверным результатам.

Естественно предположить, что нарушение уравнения баланса моментов при $f \geq f_*$ должно говорить о переходе системы в качественно новое состояние, когда наложенные связи начинают работать по-другому или их действие вообще прекращается. В таких случаях возникает необходимость введения дополнительной расчетной схемы. Правильность выбора дополнительной расчетной схемы зависит от вида связей и понимания их работы после удара трением большой силы. Используемые связи в системах Пенлеве бывают обычно либо односторонние, либо двухсторонние. Состояние связей до удара и после может влиять на нахождение реакций опор. Так в результате сильного удара трением происходит отрыв тела от опорной поверхности в случае односторонней связи с неопределенностью дальнейшего состояния системы и потерей смысла нахождения реакции, если не даются дополнительные сведения о работе системы. Если связь двухсторонняя, создающая ограничения двумя параллельными направляющими, то триггерное тело (например, ползун) просто меняет свою опорную поверхность скольжения и дальнейшее описание движения не вызывает каких-либо некорректностей. Здесь каждая из двух параллельных направляющих может представлять собой опорную поверхность. В каждый текущий момент одна из них будет являться активной, со стороны которой возникает реакция, а другая – пассивной, давление на которую не будет оказываться. После сильного удара трением роли направляющих меняются, что было замечено еще Л. Прандтлем [1] при анализе примера Пенлеве-Клейна. Правда, конкретных предложений о том, как следует это учитывать для нахождения реакций, знаменитым немецким механиком предложено не было. А это должно приниматься во внимание и учитываться на расчетных схемах и при составлении уравнений системы. Формальное внесение знака минус для соответствующих спусковых реакций, как это делалось раньше и продолжает осуществляться современниками, будет являться ошибкой и неиссякаемым источником парадоксов. То есть для двухсторонних связей нельзя считать, согласно формуле (1), что при $f > f_*$ $N = -G/(fb - a) < 0$, как это часто делалось. Это является грубейшей ошибкой. Превышение критических значений коэффициентом трения приводит не только к смене знака реакции, но и ее численного значения, отличного от того, что давала бы формула (1).

Коэффициент трения f можно воспринимать как «спусковой крючок»: как только он достигнет или превысит критическое значение f_*, происходит сильный удар трением, изменяющий наложенные связи или их работу. Это следует учитывать уже на дополнительной расчетной схеме при нахождении реакции N. Расчеты конкретных примеров систем Пенлеве, как будет представлено ниже, показывают, что эти силы становятся уже не столь большими при учете дополнительной расчетной схемы. Исходная система как бы саморегулируется, уходя от нежелательных режимов работы.

Об особенностях систем Пенлеве. На основании анализа приведенной формулы (1) для триггерных тел можно утверждать:

– для сохранения непрерывного контакта с опорной поверхностью при скольжении, необходимо чтобы $f < f_*$, т.е. шероховатость у контактирующих тел была невелика, что подтверждается сохранением баланса моментов приложенных сил;

– при $f < f_*$ могут возникать удары трением, приводящие к скачкообразному изменению скорости скольжения – как при сильных ударах, так и при слабых (без отрыва тела от опоры);

– при $f \geq f_*$ баланс моментов нарушается и добиться скольжения, сохраняя непрерывный контакт тела с опорной поверхностью будет невозможно; будут наблюдаться кратковременные или длительные отрывы тела от опоры;

– при $f \geq f_*$ в моменты отрыва тела от опорной поверхности будут возникать сильные удары трением; при слабых ударах – отрыва происходить не будет;

– при $f \geq f_*$ сильные удары трением триггерного тела изменяют качественное состояние системы Пенлеве и возникает необходимость в дополнительной расчетной схеме.

Несильный удар трением сохраняет прежнее качественное состояние системы и приводит только к скачкообразному изменению скорости скольжения. Он характерен для всех систем с сухим трением, хотя его не принято учитывать. Например, сообщение начальной скорости скольжения или, наоборот, окончание скольжения тела должно сопровождаться ударом трения. Ведь если задаваемая начальная скорость тела будет меньше начальной скорости эталонного удара трением [28], то скольжение может и не начаться. Микроудары остановки, как и при погружении ударника в грунт [38], также следует учитывать для улучшения точности моделирования скольжения. Окончание скольжения должно происходить в жестком режиме, когда текущая скорость скольжения, достигая значения начальной скорости эталонного удара [28, 38], резко падает до нуля, что также никогда не учитывается. Вышесказанное объясняется отсутствием на сегодняшний день соответствующей теории, позволяющей количественно учитывать влияние удара трением.

Начальный опыт количественного учета удара трением приведен в [28] при описании работы тормозной колодки. В этой работе описание влияния удара трением для твердых тел было сделано по аналогии с моделированием проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе [38].

Тормозная система (вращающийся диск, вжимаемый в угол) [9–11]**.** На рис. 1 показана одна из простейших систем Пенлеве, являющаяся одним из аналогов тормозной системы, в дополнении к ранее рассмотренной тормозной колодке [28]. На приведенном рисунке приняты следующие обозначения: L и K – соответственно гладкая и шероховатая поверхности, наклоненные к друг другу под постоянным углом α; f – коэффициент трения; ω – угловая скорость вращающегося диска радиуса r, к центру которого приложена постоянная горизонтальная сила P, под действием которой и вращающего момента M со стороны поверхностей, определяющие направляющие для данного угла, возникают неизвестные реакции R и N.

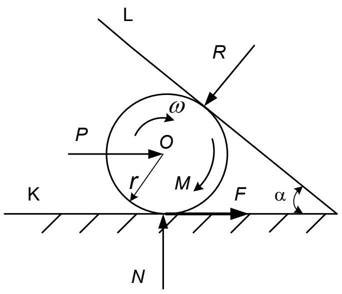

Рис. 1. Тормозная система

Полагая, что диск буксует на месте, из уравнения баланса моментов приложенных сил вычисляется сила реакции:

$$N = \frac{P}{tg\alpha - f}. \qquad (2)$$

Найденный результат считался парадоксом Пенлеве при $tg\alpha - f < 0$, так как реакция N не может быть отрицательной, а также недопустим и такой результат: $N = \infty$, что получается при $f_* = tg\alpha$.

Приведем опровержение этого. Здесь триггерным элементом является диск, на который наложены две односторонние связи в виде наклонных направляющих поверхностей, допускающие его скольжение. Спусковая сила реакции N будет соответствовать найденному значению (2) только при $f < tg\alpha$, когда выполняется уравнение баланса - что необходимо для безотрывного скольжения тела. При любом $f \geq tg\alpha$ равенство (2) использовать нельзя, так как в таких случаях уравнение баланса моментов выполняться уже не будет. Равновесного состояния прижатием вращающегося диска к направляющим L и K достичь уже не удастся. И при попытках прижать вращающийся диск к наклонным поверхностям, когда $f \geq tg\alpha$, происходит его отрыв от односторонних связей из-за ударов трением.

Для описания послеударного состояния диска должна вводится дополнительная расчетная схема и задаваться конкретные данные. Ведь диск после отскока может кратковременно изменить направление своего вращения, либо остановиться или может продолжить вращение в данном направлении. Вышесказанное дает основания говорить об отсутствии парадокса Пенлеве для приведенной тормозной системы.

Пример Пенлеве-Клейна [1]**.** Эта, пожалуй, самая популярная из систем Пенлеве. Такая система в одном из простейших вариантов представляет следующее [8]: жесткий стержень длиной $2l$ и с массой m, сосредоточенной в его центре, имеет возможность скользить вдоль двух параллельных направляющих, одна из которых шероховатая с коэффициентом трения f, а другая – гладкая; угол наклона стержня к направляющим постоянный и равен α. К стержню на расстоянии a от его центра приложена постоянная сила P, направленная параллельно направляющим. Требуется найти закон движения стержня с массой по заданным направляющим и определить силы реакций опор N, а также силу трения F при заданной начальной скорости V, имеющая одинаковое или противоположное направление с силой P.

Описанная система Пенлеве-Клейна показана на рис. 2 в четырех вариантах возможного состояния, зависящее от направления скорости движения центра масс стержня и направления реакций. Каждому варианту соответствует отдельная расчетная схема, отмеченная на рис. 2 как *а*, *б*, *с* или *д*. На таких схемах рядом с каждой точкой контакта стержня и соответствующей направляющей изображена двухсторонняя связь в укрупненном виде, где наличие небольшого зазора с одной из направляющих такой связи должно говорить о том, что эта направляющая поверхность пассивна, а отсутствие зазора – об активности направляющей, со стороны которой в данный момент возникает реакция N. Для каждого из приведенных случаев из уравнения баланса моментов на схемах рис. 2 приведены значения реакций опор. Они говорят, что на схемах *а* и *д* при безотрывном скольжении будут возникать одинаковые по модулю спусковые реакции ($f_* = 2ctg\alpha$):

$$N = \pm \frac{Pa}{l(f - 2ctg\alpha)},\ if\ f < f_*,$$

а отрыв тела от опорной поверхности возможен лишь когда $f \geq f_*$. На схемах *б* и *с* возможны только безотрывные скольжения, где реакции опор по модулю тоже одинаковы, но это уже будут не спусковые реакции:

$$N = \pm \frac{Pa}{l(f + 2ctg\alpha)},\ if\ f = \forall$$

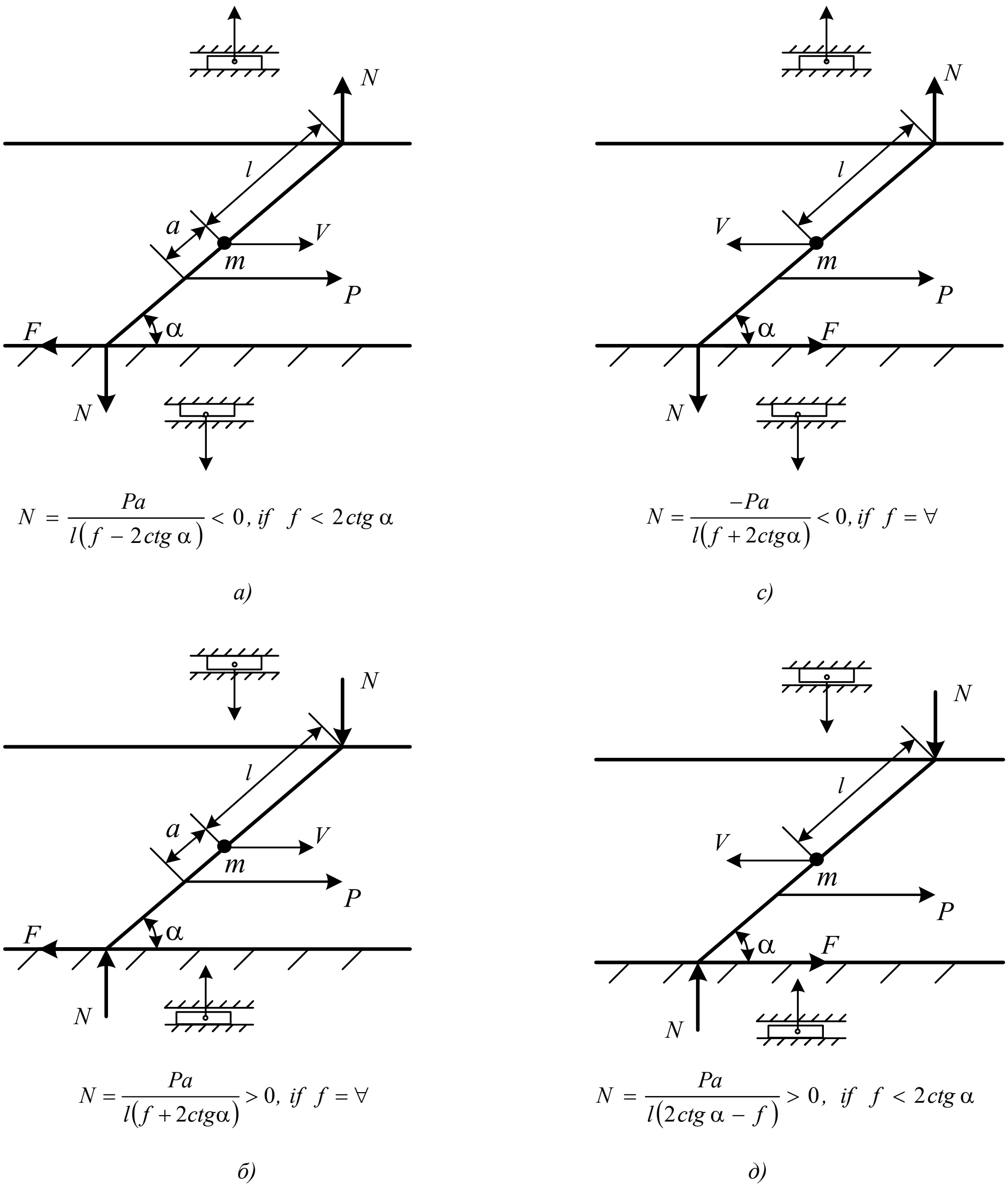

Рис. 2. Система Пенлеве-Клейна

Схемы $б$ и c на рис. 2 можно воспринимать и как послеударное состояние системы при $f \geq f_*$ для случаев a или $д$. Движение системы как бы саморегулируется ударом трения, переходя в нормальный режим.

При просмотре приведенных на рис. 2 схем следует иметь ввиду следующее. Удар трением может возникнуть только в нижней двусторонней связи из-за силы трения, действующей на ползун. Поэтому именно направление реакции N нижней связи здесь должно иметь определяющее значение и проверяться по знаку (направлению) на предмет ее соответствия принятому на расчетной схеме направлению. Нарушение такого соответствия будет говорить, что ползун сменил направляющую связи в качестве опоры, т. е. прежняя активная опорная поверхность стала пассивной. Это может происходить при сильном ударе трением, который нужно учитывать изменяя расчетную схему на рис. 2. Например, схему a на $б$, или схему $д$ на c. А значение реакции N при $f \geq f_*$ следует находить уже из новой дополнительной расчетной схемы, а не пользоваться старым выражением, меняя его знак на противоположный, как это было принято делать, и что приводило к ошибочным парадоксальным результатам. Удары трением, приводящие к смене направляющей связи в качестве опоры, могут возникать только при $f \geq f_*$ на схемах a и $д$ рис. 2. В случаях, показанных на схемах $б$ и c, удары трением приводят лишь к скачкообразному изменению скорости скольжения, без возможности отрыва тела от опорной поверхности.

Если бы вместо двухсторонних связей были односторонние, то не подтверждение принятого направления для нижней реакции на схеме a или $д$ будет означать, что в результате сильного удара трением стержень кратковременно или полностью отрывается от параллельных направляющих.

На основании сказанного становится очевидно, что никаких парадоксов здесь возникать не будет. Необходимости для более детального обсуждения ранее допускавшихся ошибок для системы Пенлеве-Клейна автор не видит.

Пример Пенлеве-Аппеля [1, 7]**.** Это тоже одна из самых популярных систем, показанная на рис. 3. Здесь предполагается возможность скольжения материальной точки M вдоль шероховатой горизонтальной направляющей, принятой за ось x. Эта точка жестко связана с другой точкой M_1, имеющей точно такую же массу m посредством невесомого стержня длины r. Считается, что точка M не имеет возможности сойти с оси x, а система движется в вертикальной плоскости Oxy только под действием силы тяжести. Описанный маятник получил название системы Пенлеве-Аппеля.

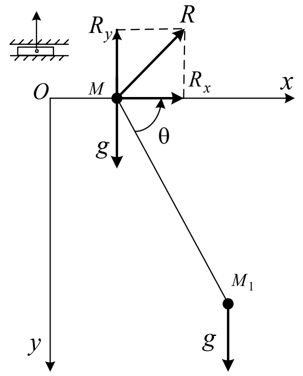

Рис. 3. Система Пенлеве-Аппеля

Не делая подробного описания такой системы, которое можно найти, например, в [1, 7], зададимся вопросом о возникновении парадокса Пенлеве здесь. Для этого нам потребуются выражение вертикальной составляющей реакции R_y, приложенной к точке M со стороны шероховатой направляющей [7]:

$$R_y = -\left(r\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2g\right)/D, \tag{3}$$

где $D = 1 + \cos^2\theta + \varepsilon f \sin\theta\cos\theta$. Здесь $\varepsilon = \pm 1$; f – коэффициент трения; $\varepsilon\dot{x}R_y > 0$; $\dot{x}$ – скорость точки M.

Выражение (3) ясно показывает, что R_y становится спусковой реакцией во всех случаях, когда $D = 1 + \cos^2\theta - f\sin\theta\cos\theta$, с критическим значением коэффициента трения $f_* = \dfrac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$.

Парадоксы Пенлеве обнаруживались, когда $f \ge f_*$. Проводя аналогичные рассуждения, которые были сделаны выше для системы Пенлеве-Клейна, можно показать, что никакие парадоксы возникать здесь не будут. Причины те же, все объясняется тем, что точка M (ползун) изменяет активную направляющую опорной поверхности у двухсторонней связи, что происходит в результате сильного удара трением. Чтобы не повториться, ограничимся только этим замечанием.

Трость Бегена [39]**.** Трость Бегена, как стержень, скользящий по шероховатой поверхности в «неправильном» направлении, показана на рис. 4.

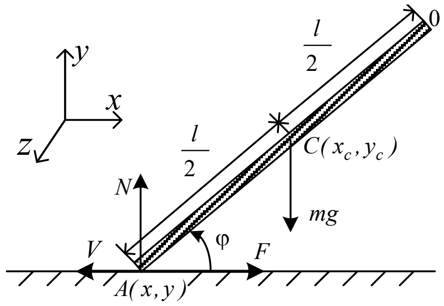

Рис. 4. Скользящий стержень (трость Бегена)

Из системы дифференциальных уравнений движения стержня, вывод которых можно найти, например, в [39], следует:

$$\ddot{y} = \frac{N}{m}\left[1 - \frac{ml^2}{4I}\cos^2\varphi\left(f tg\varphi - 1\right)\right] - g + \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin\varphi. \tag{4}$$

где $m, I.$, соответственно, масса и осевой момент инерции стержня; остальные обозначения понятны из рисунка. При $\ddot{y} = 0$ возникающая со стороны опорной поверхности сила противодействия определяется как

$N = \dfrac{m\left(g - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right)}{1 - \frac{ml^2}{4I}\cos^2\varphi\left(f tg\varphi - 1\right)}$, т. е. это спусковая реакция, с критическим коэффициентом трения

$f_* = ctg\varphi\left(1 + \dfrac{4I}{ml^2\cos^2\varphi}\right)$. Откуда видно, что когда

$y_c = 0,\ \ddot{y}_c = 0,\ \dot{\varphi} = 0,\ \dfrac{I}{ml^2} << 1,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$:

$1 - \dfrac{ml^2}{4I}\cos^2\varphi\left(f tg\varphi - 1\right) < 0 \Leftrightarrow f > f_* \Rightarrow N < 0.$

Отрицательную реакцию здесь снова относят к парадоксам Пенлеве, как нереальный случай. Но это не так. При $f \ge f_*$ возникает большое трение, нарушающее уравнение баланса моментов, которое используется для нахождения N. При таких коэффициентах трения тростью Бегена из-за сильного удара трением теряется контакт с шероховатой поверхностью, являющейся односторонней связью. И определение реакции N в такие моменты будет терять смысл.

Заключение. Все приведенные примеры показывают, что спусковые реакции могут возникать только в тех случаях, когда момент силы трения имеет противоположный знак в сравнении с моментом искомой реакции в уравнении баланса сил. В таких случаях момент силы трения как бы догружает опору, что ведет к росту силы реакции. Ввиду нелинейности таких зависимостей возникает возможность $N \to \infty$, при $f \to f_*$. В противном случае, когда момент трения «помогает» реакции и ее разгружает, сила реакции не способна будет достигать очень больших значений, а значит быть спусковой.

Во всех случаях, когда $f \geq f_*$, при попытках сообщить телу нужную скорость скольжения возникает сильный удар трением, нормальная составляющая которого приводит либо к отрыву триггерного тела от односторонней опоры, либо к изменению активной направляющей опорной поверхности для двухсторонней связи.

Даны обоснования отсутствия парадоксов Пенлеве в общем виде и на конкретных примерах. Основные ошибки, допускавшиеся ранее, заключались в следующем:

– увеличение силы трения в системах Пенлеве происходит главным образом за счет возможности неограниченного роста реакции опоры, а не коэффициента трения, как это часто считается. Согласно формуле (1) $N \to \infty$, а значит и $F \to \infty$, при $f \to f_*$, где f может быть не столь большим;

– при $f \geq f_*$ реакция опоры определялась по формуле (1), несмотря на то, что она для таких случаев неверна, и получалась из уравнения баланса моментов сил, которое переставало быть справедливым;

– считалось, что согласно формуле (1) $N = G/(a - fb) < 0$, при $f > f_*$, т. е. предполагалось, что превышение критических значений коэффициента трения ведет лишь к смене знака для силы реакции, но это не так, в этом случае $N \neq -G/(a - fb)$. Реакция опоры должна определяться из дополнительной расчетной схемы; в системе Пенлеве-Клейна, например, $N = -G/(a + fb)$, при $f \geq f_*$, согласно схеме c рис. 2;

– не учитывалось влияние ударов трением большой силы на возможность изменения состояния системы Пенлеве, что могло привести к полному прекращению работы системы с односторонними связями (например, для тормозной колодки [28] или системы Пенлеве-Клейна), либо изменить реакцию опор для двухсторонних связей (например, для системы Пенлеве-Клейна);

– не отвергалась возможность $N = \infty$, при $f = f_*$, что для реальных систем просто невозможно;

– расчетные схемы, а значит и уравнения, для случаев при большом трении систем Пенлеве были неверны – они соответствовали системам с обычным трением;

– критерии Ле Суан Аня [29] для определения возможности появления парадоксов Пенлеве теряют смысл ввиду отсутствия парадоксов как таковых;

– допускалось возможность скольжения триггерного тела в любом задаваемом направлении, хотя силы трения могли воспрепятствовать этому, тем более при большом трении; для проверки такой возможности необходимо сравнивать задаваемую начальную скорость с эталонной [28];

– окончание скольжения тела необходимо предусматривать в жестком режиме, когда текущая скорость достигает значения эталонной скорости; должен учитываться микроудар остановки (аналогично остановке ударника при погружении в грунт [38]).

Фактически показано, что системы Пенлеве представляют собой качественно новый класс систем с сухим трением, который ранее не выделяли. Что предполагает использование нестандартных подходов для их изучения.

Литература

1. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895, 111 p.
2. де Спарр М. О трении скольжения // Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 232-235.
3. Klein F. Zur Painleves Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 186.
4. Лекорню Л. О трении скольжения // Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 221-224.
5. Пфейфер Ф. К вопросу о так называемых кулоновых законах трения // Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. С. 264-316.
6. Pfeifer F. Zur Frage der sogenannten Coulombshen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 273.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
8. Григорян С.С. Разрешение парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве // Докл. АН. 2001. Т. 379, № 1. С. 54-58.
9. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 3. С. 366-375.
10. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7-33.
11. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пенлеве // Вестн. Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2. С. 53-66.
12. Бутенин Н.В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. Вып.1. С. 3-22.
13. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. № 3. С. 301-302.
14. Журавлев В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестн. Моск. гос. технич. ун-та. Сер. Приборостроение. 2017. № 2 (113) С. 77-85.
15. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. Моск. гос. технич. ун-та.им. Сер. Естественные науки. 2014. № 2 (53) С. 21-31.
16. Журавлев В.Ф. К истории закона сухого трения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 4. С.13-19.
17. Козлов В.В. Трение по Пенлеве и лагранжева механика // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 6. С. 758–761.
18. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и «удар трением» // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 912–921.
19. Самсонов В. А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная

и хаотичная механика», Изд-во Ин-та компьютерных исслед., 2001. 80 с.
20. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 4. С. 426–435.
21. Небасов М.В. Концепция сухого трения и парадоксы Пэнлеве // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. № 1. С. 21-35.
22. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика», Изд-во Ин-та компьютерных исслед., 2010. 164 с.
23. Суханов А.А. Клиновая модель трения скольжения // Современное машиностроение. Наука и образование. 2023. № 12. С. 134-146.
24. Коронатов В.А. О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 4 (44). С. 25-35.
25. Коронатов В.А. Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 44-48.
26. Коронатов В.А. Парадоксы Пенлеве для классических механических систем с сухим трением и ключ к их решению // В сб. «Математика, ее приложения и математическое образование». Мат-лы VII Междунар. конф. Улан-Удэ: Изд-во Восточ.-Сиб. гос. ун-та технологий и управления, 2020. С. 121-124.
27. Болотов А.Е. О движении материальной плоской фигуры, стесненном связями с трением // Матем. сб. 1906. Т. 25, № 4. Р. 562-708.
28. Коронатов В.А. Моделирование работы тормозной колодки с учетом удара трением, исключающего парадоксы Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2024. № 4 (64). С. 22-26.
29. Ле Суан Ань. Динамика систем с кулоновым трением (теория и эксперимент). СПб.: Нестор, 1999. 300 с.
30. Иванова Т.Б., Ердакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Докл. АН. 2016. Т. 471, № ,4. С. 421–424.
31. Мамаев И.С., Иванова Т.Б. Динамика твердого тела, опирающегося острым краем на наклонную плоскость, при наличии сухого трения // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 567-593.
32. Матросов В.М., Финогенко И.А. Аналитическая динамика систем твердых тел с трением // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 39-61.
33. Иванова Т.Б., Мамаев И.С. Динамика системы Пенлеве-Аппеля // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 1. С. 11-23.
34. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Изд-во Ижевск. ин-та компьютерных исследований, 2011. 304 с.
35. Иванов А. П. Бифуркации в системах с трением: Основные модели и методы // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 479-498.
36. Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В. Колебания и фракционный анализ. М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2020. 412 с.
37. Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях, возникающих в динамике систем с сухим трением // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 8. С. 122-124.
38. Коронатов В.А. Моделирование ударного и ударно-вращательного бурения твердых пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2024. № 1. С. 68-82.
39. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Избранные задачи механики систем с сухим трением. М.: Физматлит, 2013. 200 с.

References

1. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895, 111 p.
2. de Sparr M. On sliding friction // Lectures on friction. Moscow: Gostekhizdat, 1954. P. 232-235.
3. Klein F. Zur Painleves Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 186.
4. Lekorn L. On sliding friction // Lectures on friction. Moscow: Gostekhizdat, 1954. P. 221-224.
5. Pfeiffer F. On the question of the so-called Coulomb laws of friction // Lectures on friction. Moscow: Gostekhizdat, 1954. P. 264-316.
6. Pfeifer F. Zur Frage der sogenannten Coulombshen Reibungsgesetze // Ztschr. Math. Phys. 1909. B. 58. S. 273.
7. Appel P. Theoretical mechanics. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 487 p.
8. Grigoryan S.S. Resolution of the paradox of dry friction - the paradox of Penleve // Reports of the Academy of Sciences. 2001. Vol. 379, № 1. P. 54-58.
9. Neymark Yu.I., Fufaev N.A. The Penlev paradoxes and the dynamics of the brake pad // Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59, № 3. P. 366-375.
10. Neymark Yu.I., Smirnova V.N. On the centenary of the Penlev paradox problem // Bulletin of the Nizhny Novgorod University. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 2001. № 2. P. 7-33.
11. Neymark Yu.I., Smirnova V.N. Idealization, mathematical modeling and the Penlev paradox // Bulletin of the Nizhny Novgorod University named. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 1999. № 2. P. 53-66.
12. Butenin N.V. Consideration of «degenerate» dynamical systems using the «leap» hypothesis // Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12, Iss. 1. P. 3-22.
13. Zhuravlev V.F. About the «paradox» of the brake pad // Reports of the Academy of Sciences. 2017. Vol. 474, № 3. P. 301-302.
14. Zhuravlev V.F. Incorrect problems of mechanics // Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument engineering. 2017, № 2 (113). P. 77-85.
15. Zhuravlev V.F. 500 years of the history of the law of dry friction // Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. 2014. № 2 (53). P. 21-31.
16. Zhuravlev V.F. On the history of the law of dry friction // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2013. № 4. P.13-19.
17. Kozlov V.V. Penlev friction and Lagrangian mechanics // Reports of the Academy of Sciences. 2011. Vol. 438, № 6. P.758-761.
18. Samsonov V.A. Dynamics of the brake pad and «impact by friction» // Applied Mathematics and Mechanics. 2005. Vol. 69, № 6. P. 912-921.
19. Samsonov V. A. Essays on mechanics: Some problems, phenomena and paradoxes. Moscow; Izhevsk, Scientific Research Center «Regular and chaotic mechanics». Computer Research Institute, 2001. 80 p.
20. Dosaev M.Z., Samsonov V.A. Features of dynamics of systems with elastic elements and dry friction // Applied Mathematics and mechanics. 2021. Vol. 85, № 4. P. 426-435.
21. Nebasov M.V. The concept of dry friction and the Penleve paradoxes // Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 1998. № 1. P. 21-35.
22. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. Moscow: Izhevsk, SIC «Regular and chaotic mechanics». Computer Research Institute, 2010. 164 p.

23. Sukhanov A.A. Wedge model of sliding friction // Modern mechanical engineering. Science and education. 2023. № 12. P. 134-146.
24. Koronatov V.A. On the application of Coulomb's law in the sliding of bodies moving non-translationally and the Penleve paradoxes // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 4 (44). P. 25-35.
25. Koronatov V.A. The finale of the Penleve paradox for the brake pad // System. Methods. Technologies. 2019. № 2 (42). P. 44-48.
26. Koronatov V.A. Painlevet paradoxes for classical mechanical systems with dry friction and the key to their solution // In the collection: Mathematics, its applications and Mathematical education. Proceedings of the VII International Conference. Ulan-Ude: Publishing house of East Siberian State University of Technology and Management, 2020. P. 121-124.
27. Bolotov A.E. On the movement of a material plane figure constrained by friction // Mathematical Collection. 1906. Vol. 25, № 4. P. 562-708.
28. Koronatov V.A. Modeling the operation of a brake pad taking into account friction impact, eliminating the Penlev paradoxes // Systems. Methods. Technologies. 2024. № 4 (64). P. 22-26.
29. Le Xuan An. Dynamics of systems with coulomb friction (theory and experiment). St. Petersburg: Nestor, 1999. 300 p.
30. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev Yu.L. Experimental study of a brake pad // Reports of the Academy of Sciences. 2016. Vol. 471. № 4. P. 421-424.
31. Mamaev I.S., Ivanova T.B. Dynamics of a rigid body resting with a sharp edge on an inclined plane in the presence of dry friction // Nonlinear dynamics. 2013. Vol. 9, № 3. P. 567-593.
32. Matrosov V. M., Finogenko I. A. Analytical dynamics of systems of rigid bodies with friction // Nonlinear mechanics. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001. P. 39-61.
33. Ivanova T.B., Mamaev I.S. Dynamics of the Penleve-Appel system // Applied mathematics and mechanics. 2016. Vol. 80. № 1. P. 11-23.
34. Ivanov A. P. Fundamentals of the theory of systems with friction. Moscow-Izhevsk: SIC "Regular and chaotic dynamics", Izhevsk Institute of Computer Research, 2011. 304 p.
35. Ivanov A. P. Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // Nonlinear Dynamics, 2009. Vol. 5, № 4. P. 479-498.
36. Vlakhova A.V., Martynenko Yu.G., Novozhilov I.V. Oscillations and fractional analysis. Moscow: Izhevsk, Research Center «Regular and Chaotic Mechanics». Computer Research Institute, 2020. 412 p.
37. Finogenko I.A. On differential equations arising in the dynamics of dry friction systems |// Soros Educational Journ. 1999. № 8. P. 122-124.
38. Koronatov V.A. Modeling of impact and impact-rotational drilling of hard rocks // Physico-technical problems of mining. 2024. № 1. P. 68-82.
39. Sumbatov A.S., Yunin E.K. Selected problems of mechanics of systems with dry friction. Moscow: Fizmatlit, 2013. 200 p.