



Д.Б. Ким  
А.А. Кропотов  
И.Г. Махро

---

---

# Физика. Механика

Лабораторный практикум

Братск 2010

УДК 53

**Физика.** Механика: лабораторный практикум/ Д.Б. Ким, А.А. Кропотов, И.Г. Махро. – 4-е изд. перераб. и доп. – Братск: ГОУ ВПО «БрГУ», 2010. – 143 с.

Практикум содержит 21 лабораторную работу. В каждой работе кратко изложена теория изучаемых явлений, описана экспериментальная установка, приведена методика эксперимента и обработки его результатов.

Предназначен для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

Рецензент: **В.К. Воронов**, д-р ф.-м. наук, проф.  
Иркутского гос. техн. ун-та;

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
Лабораторная работа № 101. Определение плотности тела правильной геометрической формы.....	6
Лабораторная работа № 102. Определение ускорения свободного падения.....	10
Лабораторная работа № 103. Изучение законов сохранения импульса и энергии.....	17
Лабораторная работа № 104. Определение модуля кручения и модуля сдвига с помощью крутильного маятника.....	24
Лабораторная работа № 105. Определение скорости пули при помощи баллистического крутильного маятника.....	31
Лабораторная работа № 106. Определение скорости полета пули с помощью баллистического маятника.....	39
Лабораторная работа № 107. Проверка основного уравнения динамики вращательного движения.....	44
Лабораторная работа № 108. Маятник Максвелла.....	52
Лабораторная работа № 109. Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний.....	58
Лабораторная работа № 110. Определение момента инерции крутильного маятника методом колебаний.....	65
Лабораторная работа № 111. Математический маятник.....	69
Лабораторная работа № 112. Физический маятник.....	73
Лабораторная работа № 113. Универсальный маятник.....	80
Лабораторная работа № 114. Наклонный маятник.....	87
Лабораторная работа № 115. Определение модуля упругости методом изгиба.....	94
Лабораторная работа № 116. Определение коэффициента упругости.....	98
Лабораторная работа № 117. Градуировка звукового генератора..	103
Лабораторная работа № 118. Определение скорости звука в воздухе методом резонанса.....	110
Лабораторная работа № 119. Изучение затухающих механических колебаний.....	118
Лабораторная работа № 120. Проверка закона сохранения механической энергии.....	125
Лабораторная работа № 121. Проверка теоремы Штейнера методом линеаризации экспериментальной кривой.....	131
<b>Приложение</b> (образец оформления отчета).....	140

## Введение

Настоящее учебное пособие является руководством к лабораторным занятиям по физическим основам механики. В пособии включены описания 21 лабораторной работы по механике, механическим колебаниям и волнам, соответствующих программе по физике государственного образовательного стандарта (ГОС) для технических вузов.

Выполнение лабораторных работ помогает студентам лучше понять суть изучаемых теоретических явлений и процессов, а также на практике познакомиться с физическими приборами и методикой физических измерений.

При подготовке к лабораторным занятиям студент должен заранее подготовиться к выполнению своей лабораторной работы в соответствии с графиком проведения лабораторных работ для данной специальности.

Используя методические указания к лабораторной работе, необходимо:

- 1) изучить теорию исследуемого процесса или явления;
- 2) ознакомиться с рабочей установкой и разобраться с порядком проведения лабораторной работы.

При этом в рабочую тетрадь необходимо записать:

- название работы;
- цель исследования;
- перечень приборов и принадлежностей, используемых в лабораторной работе;
- привести схему установки или ее рисунок;
- записать рабочую формулу (формулы) с расшифровкой входящих величин;
- формулу расчета погрешностей;
- привести таблицу (таблицы) для записей результатов измерений и вычислений.

Допущенный к лабораторной работе студент знакомится с принципом действия приборов, собирает схему установки и после проверки схемы преподавателем или лаборантом приступает к эксперименту. Полученные результаты студент заносит в таблицы, которые проверяются преподавателем.

По результатам измерений в рабочую тетрадь записывают:

– расчеты искомых величин и погрешности (в случае необходимости результаты эксперимента приводятся в виде графиков);

– конечный результат;

– вывод (краткий анализ полученных результатов и погрешности, сравнение их с табличными значениями и т.п.).

Выполненную и проверенную преподавателем лабораторную работу студент должен оформить в виде отчета на листах формата А4. С образцом отчета можно ознакомиться в лаборатории механики и молекулярной физики. Для защиты лабораторных работ студент может использовать дополнительно литературу, ссылки на которую для удобства размещены в конце каждой работы с указанием соответствующих параграфов, а также в конце лабораторного практикума приведен более расширенный список рекомендуемой литературы.

Для подготовки к лабораторному практикуму и его защите в последние годы активно используются электронные ресурсы Рунета такие как: электронная энциклопедия Википедия (<http://ru.wikipedia.org>), научная электронная библиотека eLIBRARY.ru (<http://elibrary.ru>), учебная физико-математическая библиотека (<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>) и др. В частности электронная библиотека сайта EqWorld содержит файлы учебников, учебных пособий, сборников задач и упражнений, конспектов лекций, монографий и справочников по математике, механике и физике.

В данном учебном пособии обобщен опыт многолетней работы учебной лаборатории «Механика и молекулярная физика» Братского государственного университета. Лабораторный практикум базируется на приборах и оборудовании отечественного производства, часть оборудования изготовлена сотрудниками кафедры при участии студентов. Ядро лабораторного практикума по механике составляют лабораторные работы, поставленные на основе современных лабораторных установок производства Польши. В постановке лабораторных работ и их методическом обеспечении участвовали сотрудники кафедры физики: проф. Ким Де Чан, проф. В.В. Махро, доц. А.Г. Погодаев, доц. А.С. Яскин, доц. А.А. Кропотов, доц. Н.П. Морковцев, доц. И.Г. Махро, доц. С.С. Рудя, ст. преп. Корсакова М.П., ст. преп. Э.А. Мамм, ст. преп. Е.Т. Агеева и др.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕЛА ПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

*Цель работы:* определение плотности шестигранной призмы; изучение методов обработки экспериментальных данных.

*Приборы и принадлежности:*  
шестигранная призма,  
штангенциркуль,  
технические весы.

### Основные теоретические сведения

Плотностью тела называется физическая величина, равная отношению массы тела к его объему:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (101.1)$$

где  $m$  – масса тела,  $V$  – объем тела. В СИ единицей плотности является  $\text{кг/м}^3$ .

Из геометрии объем шестигранной призмы вычисляется по формуле:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} D^2 h, \quad (101.2)$$

где  $D$  – расстояние между параллельными гранями призмы,  $h$  – высота призмы (рис.101.1). Подставив (101.2) в формулу (101.1), получим для плотности призмы следующее выражение:

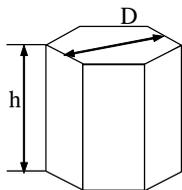


Рис. 101.1

$$\rho = \frac{2m}{\sqrt{3}D^2 h}.$$

Для повышения точности определения плотности тела измерения  $D$  и  $h$  необходимо провести несколько раз. Тогда расчетная формула примет вид:

$$\langle \rho \rangle = \frac{2m}{\sqrt{3} \langle D \rangle^2 \langle h \rangle}, \quad (101.3)$$

где  $\langle D \rangle$  и  $\langle h \rangle$  – средние арифметические значения прямых многократных измерений  $D$  и  $h$ , которые можно определить, используя формулу:

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (101.4)$$

Здесь  $\langle a \rangle$  – среднее арифметическое значение некоторой физической величины  $a$  (в нашем случае  $D$  или  $h$ ),  $n$  – число измерений.

Логарифмируя выражение (101.3), определяющее зависимость искомой величины ( $\rho$ ) от величин, доступных прямому измерению ( $m, D, h$ ), получим

$$\ln \langle \rho \rangle = \ln m - \ln \langle h \rangle - 2 \ln \langle D \rangle. \quad (101.5)$$

Рассматривая  $\rho$ , как функцию независимых переменных  $m, D, h$  после дифференцирования логарифмического выражения (101.5), получим формулу относительной погрешности  $E$  в явном виде:

$$E = \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta D}{\langle D \rangle}\right)^2}. \quad (101.6)$$

Абсолютная погрешность  $\Delta a$  прямых  $n$  измерений величины  $a$  по методу Стьюдента равна:

$$\Delta a = \tau_{n,P} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |\Delta a_i|^2}{n(n-1)}}, \quad (101.7)$$

где  $\tau_{n,P}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от значения доверительной вероятности  $P$  и числа опытов  $n$ ;  $\Delta a_i$  – абсолютная погрешность величины  $a_i$  в  $i$ -ом измерении:

$$\Delta a_i = a_i - \langle a \rangle.$$

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Определить массу призмы  $m$  взвешиванием на технических весах.

2. Измерить штангенциркулем геометрические размеры призмы  $D$  и  $h$ . Каждую величину измеряют не менее 5 раз ( $n \geq 5$ ). Измерения рекомендуется проводить между разными точками тела таким образом, чтобы был учтен максимально возможный разброс значений данного параметра.

3. Определить средние значения  $\langle D \rangle$  и  $\langle h \rangle$ , используя формулу (101.4) и по формуле (101.3) вычислить среднее значение плотности.

4. По методу Стьюдента (101.7) вычислить абсолютные погрешности  $\Delta h$  и  $\Delta D$  соответствующих значений прямых многократных измерений  $h$  и  $D$ . Значение доверительной вероятности  $P$  указывается преподавателем.

5. Абсолютную погрешность  $\Delta m$  оценить как погрешность прямого однократного измерения.

6. По формуле (101.6) вычислить относительную погрешность  $E$  окончательного результата.

7. Определить абсолютную погрешность окончательного результата по формуле:

$$\Delta \rho = E \langle \rho \rangle .$$

8. Окончательный результат записать в виде:

$$\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho) \text{ кг/м}^3,$$

помня, что значение  $\langle \rho \rangle$  должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и разряд первой значащей цифры абсолютной погрешности  $\Delta \rho$ . Указывается доверительная вероятность  $P$  и относительная погрешность  $E$  в %.

Данные измерений и промежуточных значений заносят в таблицы.

*Форма таблицы результатов 101.1*

№	$D_i$ , м	$\langle D \rangle$ , м	$\Delta D_i$ , м	$(\Delta D_i)^2$ , м <sup>2</sup>	$\Sigma(\Delta D_i)^2$ , м <sup>2</sup>	$\Delta D$ , м	$m$ , кг	$\Delta m$ , кг
1								
2								
3								
4								
5								

*Форма таблицы результатов 101.2*

№	$h_i$ , м	$\langle h \rangle$ , м	$\Delta h_i$ , м	$(\Delta h_i)^2$ , м <sup>2</sup>	$\Sigma(\Delta h_i)^2$ , м <sup>2</sup>	$\Delta h$ , м	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , %
1								
2								
3								
4								
5								

**Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Что называется плотностью тела?
3. Что называется измерением?
4. Какие измерения называются прямыми? Косвенными?
5. Что называется абсолютной и относительной погрешностью?

**Вопросы для защиты работы**

1. Выведите рабочую формулу?
2. Какие ошибки называются систематическими, случайными?
3. Как рассчитать абсолютную погрешность прямых многократных измерений по методу Стьюдента? Какие ошибки учитывают данные методы?
4. Что называется доверительной вероятностью и доверительным интервалом?
5. Как оценить абсолютную погрешность прямого однократного измерения? Табличной величины?
6. Каков метод расчета погрешностей косвенных измерений? Получите формулу для расчета относительной погрешности.
7. Каково правило округления значения абсолютной погрешности и среднего значения искомой величины?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

*Цель работы:* экспериментальное определение ускорения свободного падения с помощью прибора Атвуда.

*Приборы и принадлежности:*  
прибор Атвуда с секундомером,  
добавочные грузы.

### Основные теоретические сведения

В вакууме под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением  $g$ . Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$ , действует сила

$$G = m g,$$

называемая силой тяжести. Ускорение свободного падения  $g$  и сила тяжести  $G$  незначительно зависят от широты местности. Кроме того,  $G$  и  $g$  зависят также от высоты над уровнем моря – с удалением от центра Земли они уменьшаются. Используя законы динамики можно измерить ускорение свободного падения  $g$ .

*Первый закон Ньютона, называемый законом инерции, отражает свойство материи быть в вечном движении, и гласит, что всякое тело сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения или покоя до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить данное состояние.*

Тело массой  $m$ , движущееся по инерции равномерно и прямолинейно, обладает вполне определенной постоянной скоростью и, следовательно, неизменным импульсом  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Опыты показывают, что если на данное тело действует в течение некоторого времени  $dt$  сила, то данное тело изменяет свою скорость по величине и направлению, в результате чего импульс тела  $m\vec{v}$  также меняется.

*Сила  $\vec{F}$  является мерой действия, производимого со стороны другого тела на данное тело, в результате чего изменяется скорость тела, а, следовательно, и его импульс, или оно*

деформируется. Произведение силы  $\vec{F}$  на время ее действия называется импульсом силы.

В классической механике, которая называется ньютоновской, движение тела описывается уравнением второго закона Ньютона.

Изменение импульса тела по времени равно результирующей силе, действующей на тело, то есть

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \quad (102.1)$$

где  $m$  – масса тела,  $v$  – его скорость.

Существует несколько понятий масс: гравитационная, инертная, электромагнитная. В классической механике рассматривается гравитационная и инертная массы. Поскольку экспериментально доказано, что гравитационная масса не отличается от инертной с точностью до  $10^{-12}$  кг, то в дальнейшем будем рассматривать только инертную массу.

Количественная мера инертности тела называется инертной массой. Свойство тела противиться попыткам изменить его движение называют инертностью.

Масса тела не зависит от скорости. Так как  $m = \text{const}$ , то (102.1) можно записать в виде.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (102.2)$$

Из определения мгновенного ускорения следует, что

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

тогда (102.2) запишется в виде

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (102.3)$$

Уравнение (102.3) является частным случаем второго закона Ньютона: *результующая сила  $\vec{F}$  равна произведению массы тела на его ускорение*. Для решения механических задач используют уравнение (102.3).

Третий закон Ньютона определяет *характер действия тел*

друг на друга (всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия): силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей центры масс взаимодействующих тел. Математически третий закон Ньютона записывается в виде:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{или} \quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|.$$

### Описание рабочей установки и метода измерений g

Законы механики поступательного движения могут быть проверены опытным путем на приборе Атвуда, предназначенном для исследования прямолинейного равномерного и равноускоренного движения

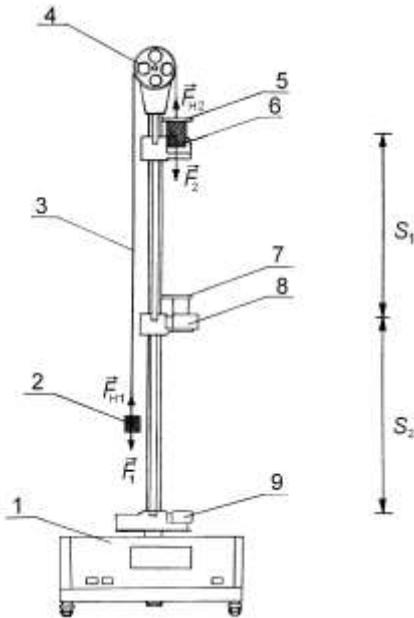


Рис. 102.1

и, в частности, для определения ускорения свободного падения. Прибор Атвуда (рис.102.1) состоит из легкого блока 4, способного вращаться на подшипниках вокруг горизонтальной оси практически без трения. Через блок перекинута тонкая капроновая нить 3 с двумя одинаковыми грузами 2 и 6 массами  $m_1$  каждый. При равенстве масс грузов система находится в равновесии. Если на груз 6 положить перегрузок 5 массой  $m_2$ , то система начнет двигаться ускоренно, причем оба груза будут иметь одина-

ковое по величине ускорение, пропорциональное результирующей всех сил, действующих на систему, и обратно пропорциональную ее массе. На груз 2 действует сила натяжения нити  $F_{H1}$  и сила тяжести  $F_1$ :

$$F_1 = m_1 g. \quad (102.4)$$

На груз 6 действует сила натяжения нити  $F_{H2}$  и сила тяжести  $F_2$ :

$$F_2 = (m_1 + m_2)g. \quad (102.5)$$

При невесомом блоке и нерастяжимой нити силы натяжения равны и  $F_{H1} = F_{H2} = F_H$ , тогда согласно второму закону Ньютона (102.3), уравнения движения грузов 2 и 6 запишутся в виде

$$m_1 a = F_H - m_1 g, \quad (102.6)$$

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g - F_H. \quad (102.7)$$

Складывая почленно (102.6) и (102.7), получим

$$(2m_1 + m_2)a = m_2 g$$

или

$$g = \frac{2m_1 + m_2}{m_2} a. \quad (102.8)$$

Ускорение  $a$  груза определяется из уравнений кинематики. Учитывая, что начальная скорость равна 0, а  $S_1$  – участок движения с ускорением  $a$ , можно записать

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad (102.9)$$

где  $t_1$  – время прохождения пути  $S_1$  может быть определено из следующих соображений: начальная скорость на участке движения  $S_2$  равна конечной скорости на участке  $S_1$ , и может быть определена, как

$$v = at_1. \quad (102.10)$$

Выразив  $a$  из (102.9) и, подставив  $t_1$  из (102.10), получим

$$a = \frac{2S_1}{t_1^2} = \frac{2S_1 a^2}{v^2},$$

откуда

$$a = \frac{v^2}{2S_1}. \quad (102.11)$$

Скорость  $v$  груза можно определить следующим образом.

Груз 6 с перегрузком на участке пути  $S_1$  движется равноускоренно. Когда перегрузок 5 массой  $m_2$  застревает на кольце 7, то участок пути  $S_2$  груз 6 проходит равномерно. Это следует из уравнений (102.6) и (102.7), взяв  $m_2 = 0$ , запишем

$$m_1 a = F_H - m_1 g,$$

$$m_1 a = m_1 g - F_H.$$

Сложив первое уравнение со вторым, получим  $2m_1 a = 0$ , или,  $a = 0$ , то есть скорость на участке пути  $S_2$  постоянна и равна конечной скорости движения на участке  $S_2$ . При равномерном прямолинейном движении (движение с постоянной скоростью)

$$v = \frac{S_2}{t_2},$$

то есть (102.11) можно переписать в виде

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}. \quad (102.12)$$

Подставив (102.12) в (102.8) окончательно получим

$$g = \frac{2m_1 + m_2}{m_2} \cdot \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}. \quad (102.13)$$

Время движения системы  $t_2$  измеряют миллисекундомером 1, который включается и выключается автоматически с помощью фотоэлектрических датчиков 8 и 9, установленных в начале и конце участка  $S_2$ . При включении прибора в сеть электромагнит, установленный соосно с блоком, при помощи фрикционной муфты удерживает систему блока с грузами в состоянии покоя (блокирует систему). Нажатие клавиши «ПУСК» (клавиша фиксируется в нажатом состоянии) приводит к срабатыванию электромагнита, при этом система грузов приходит в движение. В конце движения система вновь блокируется электромагнитом и тормозится. Клавиша «СБРОС» служит для обнуления показаний миллисекундомера и снятия блокировки системы электромагнитом при нажатой клавише «ПУСК».

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Подключить сетевой кабель прибора к сети питания.
2. Нажать клавишу «СЕТЬ», проверяя все ли индикаторы миллисекундомера, высвечивают нуль и светят ли лампочки фотоэлектрических датчиков.
3. Переместить правый груз в верхнее положение, положить на него один из дополнительных грузиков, совместить нижнюю грань правого груза с чертой, нанесенной на верхнем кронштейне, и проверить, находится ли система в состоянии покоя.
4. Измерить с помощью шкалы на колонке, заданные пути равноускоренного  $S_1$  и равномерного  $S_2$  движений большого груза  $\delta$ .
5. Нажать клавишу «ПУСК».
6. Записать измеренное значение времени движения большого груза на пути  $S_2$ .
7. Возвратить систему в исходное положение. Для этого нажать клавишу «СБРОС», переместить правый груз в верхнее положение и отжать клавишу «ПУСК».
8. Измерение повторить 5-10 раз и определить среднее значение времени движения  $\langle t_2 \rangle$ .
9. Подставив среднее значение времени  $\langle t_2 \rangle$  в формулу (102.13), определить ускорение свободного падения  $\langle g \rangle$ .
10. Методом расчета погрешностей косвенных измерений найти относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta g$  погрешности величины  $\langle g \rangle$ :

$$E = \frac{\Delta g}{\langle g \rangle} = \frac{2\Delta m_1 + \Delta m_2}{2m_1 + m_2} + 2 \frac{\Delta S_2}{S_2} + \frac{\Delta m_2}{m_2} + \frac{\Delta S_1}{S_1} + 2 \frac{\Delta t_2}{\langle t_2 \rangle},$$
$$\Delta g = E \langle g \rangle.$$

11. Данные результатов измерений и вычислений заносят в таблицу 102.1.

**Примечание:** Масса каждого из больших грузов составляет  $m_1 = (60,00 \pm 0,01)$  г. Каждый дополнительный грузик имеет значение массы  $m_2$ , выгравированное на самом грузике и определенное с точностью  $\pm 0,01$  г.

Форма таблицы результатов 102.1

$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$S_1$ , м	$S_2$ , м	$t_2$ , с	$\langle t_2 \rangle$ , с	$\langle g \rangle$ , м/с <sup>2</sup>	$\Delta g$ , м/с <sup>2</sup>	$E$ , %

**Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Опишите устройство рабочей установки и ход эксперимента.
3. Запишите рабочую формулу, поясните ее.

**Вопросы для защиты работы**

1. Сформулируйте законы Ньютона и раскройте их смысл.
2. Дайте определение импульса тела и импульса силы.
3. Дайте определение массы тела.
4. Дайте понятие силы и приведите методы измерения сил.
5. От чего зависит ускорение свободного падения тел  $g$ ?
6. Поясните, почему на участке  $S_1$  груз движется равноускоренно, а на участке  $S_2$  – равномерно?
7. Выведите рабочую формулу.
8. Получите формулу для расчета относительной погрешности, пользуясь дифференциальным методом, и укажите пути повышения точности результата эксперимента.
9. Пусть в блоке действует постоянная сила трения  $F_{тр}$ , получите рабочую формулу для определения ускорения свободного падения с учетом силы трения.

## **ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ**

*Цель работы:* экспериментальное исследование процесса соударения упругих тел и проверка выполнения в системе соударяющихся тел законов сохранения импульса и энергии.

*Приборы и принадлежности:*  
лабораторная установка FPM-08.

### **Основные теоретические сведения**

В природе существует несколько законов сохранения, которые являются следствием свойств симметрии Вселенной. Известны законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда, барионного числа (заряда), лептонного числа (заряда), четности и некоторых других величин. В механике фундаментальную роль играют первые три из перечисленных законов.

Важность законов сохранения определяется следующими их свойствами. Законы сохранения не зависят от вида траектории и от характера действующих сил, поэтому они позволяют получать весьма общие и существенные выводы из уравнений движения. Законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы не известны, как это имеет место в физике элементарных частиц. Законы сохранения помогают определить невозможные явления и указать неосуществимость разработки некоторых конструкций – например, вечного двигателя или спутника, приводимого в движение одними внутренними силами. В тех случаях, когда сила в точности известна, закон сохранения может оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц. Для решения задач физики обычно следуют такому порядку: прежде всего один за другим применяются соответствующие законы сохранения, и только после этого, если в задачах ничего не упущено, переходят к решению дифференциальных уравнений, использованию вариационного принципа или метода возмущений, применению вычислительных машин и других средств.

Напомним основные понятия, которыми мы будем здесь пользоваться. Механической энергией системы материальных точек или частиц называется следующая функция их координат и скоростей:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}), \quad (103.1)$$

где  $m_i$ ,  $v_i$  – соответственно масса и скорость  $i$ -ой материальной точки,  $U(\vec{r})$  – некоторая функция взаимного расположения точек.

*Первое слагаемое в (103.1) называется кинетической энергией системы, а величина  $E_i = m_i v_i^2 / 2$  – кинетической энергией материальной точки.*

Второй член в (103.1), т.е.  $U(\vec{r})$  называется потенциальной энергией системы. *Эта величина зависит только от характера взаимодействия между частицами и их относительного расположения в системе.* Например, потенциальная энергия материальной точки массой  $m$ , находящейся в поле сил тяжести на высоте  $h$  над поверхностью Земли, равна

$$E_n = mgh, \quad (103.2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения; а потенциальная энергия упругой силы

$$E_n = \frac{kx^2}{2}. \quad (103.3)$$

*Закон сохранения механической энергии утверждает, что для замкнутой системы частиц, в которой не действуют диссипативные силы, полная механическая энергия системы, определяемая формулой (103.1), остается постоянной во времени.* Система является замкнутой, если на нее не действуют внешние силы.

*Диссипативными называются силы, работа которых при перемещении частиц зависит от пути, по которому происходит это перемещение.* Действие диссипативных сил всегда связано с переходом механической энергии в другие виды энергии. Типичным примером диссипативных сил являются силы трения,

сопротивления.

В противоположность им *консервативными* называются силы, работа которых при перемещении частицы из одной точки в другую не зависит от формы пути, а зависит от начального и конечного положения частицы. Действие консервативных сил в системе не нарушает закон сохранения полной механической энергии. Консервативными силами являются сила тяжести, упругие силы, гравитационные силы и др.

*Импульсом материальной точки или частицы массой  $m$  называется векторная величина  $\vec{p}$ , равная*

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (103.4)$$

Суммарный импульс системы, состоящей из  $n$  частиц:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (103.5)$$

где  $\vec{p}_i$  – импульс  $i$ -ой частицы.

*В замкнутой механической системе векторная сумма импульсов  $\vec{p}$  взаимодействующих частиц не меняется во времени. Это утверждение является законом сохранения импульса, т.е.*  
$$\sum_i m_i \vec{v}_i = const.$$

При соударении телá в большей либо меньшей мере деформируются.

*Абсолютно неупругим* считается удар, после которого тела сохраняют деформацию и не восстанавливают первоначальную геометрическую форму. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию. После удара телá движутся с одинаковой скоростью (т.е. как одно тело) либо покоятся. При неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса, а закон сохранения механической энергии не выполняется, т.к. механическая энергия переходит во внутреннюю энергию.

*Абсолютно упругим* называется такой удар, после которого во взаимодействующих телах не остается никаких деформаций, и полная механическая энергия системы тел сохраняется.

## Описание рабочей установки и метода измерений

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Ниже проверяем эти законы на опыте для упругих ударов.

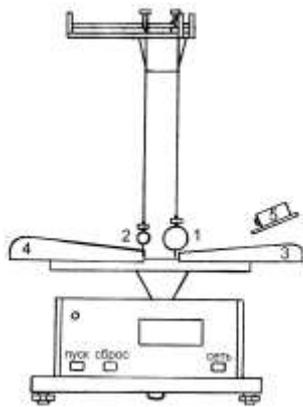


Рис 103.1

Экспериментальные измерения импульса и механической энергии проводятся на установке FPM-08, схема которой приведена на рис. 103.1. Конструкция установки предусматривает возможность укрепления на длинных нитях металлических шаров 1 и 2. Стержни, на которых фиксируются шары, имеют заостренные концы, которые служат указателями для определения угла отклонения нити подвеса. Отсчет угла отклонения производится по шкалам 3 и 4. Один из шаров можно фиксировать в отклоненном положении с помощью электромагнита 5.

Метод измерения импульса и кинетической энергии шаров до и после удара основывается на использовании закона сохранения механической энергии. Масса шаров измеряется взвешиванием на аналитических весах. Скорости же шаров в моменты времени непосредственно до и после удара можно определить

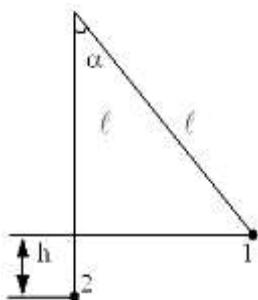


Рис. 103.2

по углу отклонения нити подвеса. Действительно, в положении максимального отклонения полная энергия шара равна потенциальной энергии  $E_n = mgh$ , где  $m$  – масса шара,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h$  – высота поднятия центра масс шара над уровнем положения равновесия (см. рис. 103.2).

Потенциальная энергия шара в нижней точке положения равновесия переходит в кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

тогда

$$mgh = \frac{m\nu^2}{2}. \quad (103.6)$$

Таким образом,

$$\nu = \sqrt{2gh}. \quad (103.7)$$

Высоту  $h$  можно найти, зная угол отклонения нити подвеса  $\alpha$  и длину подвеса  $l$ .

Из рис.103.2 видно, что

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha), \quad (103.8)$$

поэтому:

$$\nu = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl}. \quad (103.9)$$

Определяем импульсы шаров до

$$p = m_1 \nu \quad (103.10)$$

и после соударения

$$p' = m_1 \langle u_1 \rangle + m_2 \langle u_2 \rangle, \quad (103.11)$$

а так же кинетические энергии шаров до соударения

$$E_k = \frac{m_1 \nu^2}{2} \quad (103.12)$$

и после

$$E'_k = \frac{m_1 \langle u_1 \rangle^2}{2} + \frac{m_2 \langle u_2 \rangle^2}{2}, \quad (103.13)$$

где  $\nu$  и  $\langle u_1 \rangle$  – скорость 1 шара до удара и среднее значение скорости 1 шара после соударения, соответственно;  $\langle u_2 \rangle$  – среднее значение скорости 2 шара после удара.

При выполнении законов сохранения мы должны получить следующие соотношения:  $p = p'$  и  $E_k = E'_k$ . Но, учитывая, что взаимодействие стальных шаров в строгом смысле не является

абсолютно упругим, получим лишь приближительные равенства:  
 $p \approx p'$  и  $E_k \approx E'_k$ .

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Провести корректировку осевой установки шаров.
2. Измерить длину нитей  $l$  от точки подвеса до метки на середине шаров.
3. Ослабив фиксирующие гайки, установить шкалы 3, 4 таким образом, чтобы указатели подвесов занимали на шкалах нулевое положение, затянуть фиксирующие гайки.
4. Нажать клавишу «СЕТЬ».
5. Отжать клавишу «ПУСК».
6. Правый шар отодвинуть в сторону электромагнита и заблокировать его в этом положении, записать значение угла отклонения подвеса правого шара от вертикали  $\alpha$ .
7. Нажать клавишу «СБРОС».
8. Нажать клавишу «ПУСК».
9. После столкновения шаров измерить по шкале углы отклонения шаров  $\alpha'_1$  (правый шар) и  $\alpha'_2$  (левый шар).
10. Измерение повторить 8 – 10 раз.
11. Взвесить шары на аналитических весах.
12. Вычислить средние значения  $\langle \alpha'_1 \rangle$  и  $\langle \alpha'_2 \rangle$ .
13. По формуле (103.9) вычислить скорость  $v$  правого шара до соударения. Подставив в эту же формулу вместо значения угла  $\alpha$  средние значения  $\langle \alpha'_1 \rangle$  и  $\langle \alpha'_2 \rangle$ , рассчитайте средние скорости  $\langle u_1 \rangle$ ,  $\langle u_2 \rangle$  шаров после соударения.
14. Результаты вычислений занести в таблицу.
15. Поставив значения скоростей шаров  $v$ ,  $\langle u_1 \rangle$  и  $\langle u_2 \rangle$  в формулы (103.10) – (103.13) вычислить сумму импульсов и кинетической энергии до и после удара. Затем сравнить их значения.
16. Сделать вывод о выполнении законов сохранения энергии и импульса.
17. Рассчитать относительную погрешность вычисления импульса по формуле

$$E_p = \frac{|p - p'|}{p} \cdot 100\% .$$

Форма таблицы результатов 103.1

$m_1$	$m_2$	$l$	$\alpha$	$\alpha_1'$	$\alpha_2'$	$\langle \alpha_1' \rangle$	$\langle \alpha_2' \rangle$	$v$	$\langle u_1 \rangle$	$\langle u_2 \rangle$	$p$	$p'$	$E_k$	$E_k'$	$E_p$
кг	кг	м	град	град	град	град	град	м/с	м/с	м/с	кг·м/с	кг·м/с	Дж	Дж	%

### Вопросы для допуска к работе

1. Изложить цель работы.
2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
3. Поясните смысл и метод определения всех величин, вносимых в таблицу.

### Вопросы для защиты работы

1. Сформулируйте законы сохранения импульса и механической энергии системы.
2. Приведите определения кинетической и потенциальной энергии, импульса системы.
3. Какие силы называются консервативными и диссипативными? Приведите примеры таких сил.
4. Выведите формулу для расчета скорости шара в нижней точке траектории по углу отклонения нити подвеса.
5. Каков характер удара шаров, упругий или неупругий?
6. Какие удары называются абсолютно упругими и абсолютно неупругими?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ КРУЧЕНИЯ И МОДУЛЯ СДВИГА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

*Цель работы:* экспериментальное определение модуля кручения и модуля сдвига стальной проволоки методом крутильных колебаний.

*Приборы и принадлежности:*  
 крутильный маятник,  
 секундомер,  
 штангенциркуль,  
 измерительная линейка.

### Общие теоретические сведения

Как показывает опыт, при воздействии на тело внешних сил оно меняет форму и размеры, т.е. наблюдается механическая деформация. В физике рассматриваются наиболее простые виды деформации: растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг, кручение.

Пусть имеем тело в форме прямоугольного параллелепипеда, закрепленного в своей нижней части, и мысленно разделим

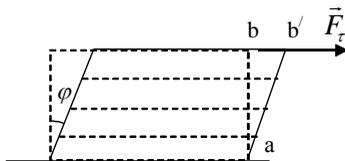


Рис. 104.1

его на ряд слоев, параллельных основанию (рис.104.1). Если к верхней плоскости параллелепипеда приложить силу  $\vec{F}_\tau$ , касательную к этой плоскости, то тело деформируется – одни слои будут двигаться относительно других, оставаясь параллельными друг другу, причем, боковые грани параллелепипеда останутся плоскостями, параллельными друг другу. Такая деформация является чистым сдвигом и характеризуется углом сдвига  $\varphi$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bb'}{d},$$

где  $d$  – толщина тела, а  $bb'$  – абсолютная величина сдвига верхнего слоя относительно нижнего.

Касательная сила  $dF_\tau$ , приходящаяся на единицу площади

поверхности, на которую действует эта сила, называется касательным механическим напряжением  $\tau$ .

$$\tau = \frac{dF_\tau}{dS}, \quad \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right],$$

где  $dF_\tau$  – касательная к поверхности  $dS$  сила.

Если угол  $\varphi$  мал, то  $\text{tg}\varphi \approx \varphi = \frac{bb'}{d}$ , угол сдвига,  $\varphi$  называют относительным сдвигом, выражаемым в радианах. По закону Гука относительный сдвиг  $\varphi$  пропорционален касательному напряжению  $\tau$ :

$$\tau = G\varphi, \quad (104.1)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $[\text{Н}/\text{м}^2]$ . Модуль сдвига равен касательному напряжению, необходимому для изменения угла сдвига на единицу ( $\varphi = 1$  рад). Модуль сдвига зависит от температуры, кристаллической структуры и рода вещества.

Перейдем далее к деформации кручения. Рассмотрим образец в виде цилиндрического стержня длиной  $L$  и радиусом  $r$  (рис. 104.2). Пусть нижнее основание образца закреплено неподвижно, а к верхнему приложен момент  $\vec{M}$  пары сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , закручивающий верхний конец образца против часовой стрелки.

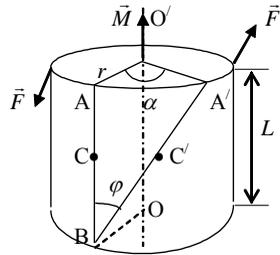


Рис. 104.2

Момент пары сил, вызывающий кручение стержня, называется крутящим моментом. Для небольших деформаций любого типа справедлив закон Гука, поэтому применительно к деформации кручения можно записать:

$$M = -D \cdot \alpha, \quad (104.2)$$

где модуль кручения  $D$  равен моменту сил, вызывающему закручивание стержня на единичный угол.  $[D] = \text{Н}\cdot\text{м}$ .

Поскольку деформация кручения представляет собой одновременные действия сдвига и сжатия (или растяжения), то между модулями кручения  $D$  и сдвига  $G$  существует количественная

связь, которую можно определить следующим образом.

Пусть однородный стержень радиусом  $R$  и длиной  $l_0$  сделан из материала, модуль сдвига которого равен  $G$  и закручен моментом сил  $M$  на угол  $\alpha_0$  (рис. 104.3,а). Вырежем из стержня длиной  $l_0$  диск достаточно малой высоты  $dl$  на расстоянии  $l$  от неподвижного основания. Положим, что нижнее основание этого диска неподвижно, а верхнее – повернулось на бесконечно малый угол  $d\alpha$ . Тогда бесконечно малый угол сдвига  $d\varphi$  можно определить из геометрии

$$CC' = r d\alpha \quad \text{и} \quad CC' = dl d\varphi.$$

Тогда

$$d\varphi = r \frac{d\alpha}{dl}. \quad (104.3)$$

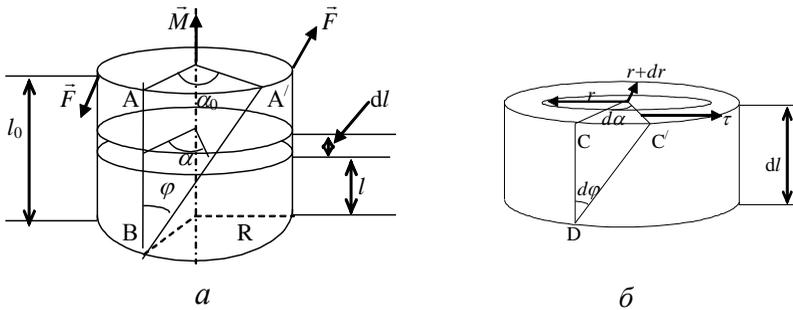


Рис. 104.3

Вырежем кольцо радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 104.3,б) из диска толщиной  $dl$ . Определим касательное напряжение  $\tau$ , действующее на поверхность кольца, из закона Гука

$$\tau = G d\varphi = Gr \frac{d\alpha}{dl}. \quad (104.4)$$

Тогда касательная сила, действующая на поверхность кольца, равна

$$dF_\tau = \tau dS = \tau 2\pi r dr, \quad (104.5)$$

где  $dS = 2\pi r dr$  – площадь поверхности кольца. С учетом (104.4)

формулу (104.5) можно записать в виде:

$$dF_\tau = G2\pi r^2 dr \frac{d\alpha}{dl}. \quad (104.6)$$

Момент этой силы относительно оси вращения равен:

$$dM = dF_\tau \cdot r = G2\pi r^3 dr \frac{d\alpha}{dl}.$$

Тогда момент сил по всей поверхности диска равен:

$$M = 2\pi G \frac{d\alpha}{dl} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G}{2} R^4 \frac{d\alpha}{dl}. \quad (104.7)$$

Поскольку стержень однородный, то деформация кручения однородная и для нее справедливо соотношение:

$$\frac{\alpha_0}{l_0} = \frac{d\alpha}{dl}. \quad (104.8)$$

С учетом (104.8) уравнение (104.7) можно записать в виде:

$$M = \frac{\pi G}{2l_0} R^4 \alpha_0. \quad (104.9)$$

Сравнивая (104.9) с формулой (104.2), получим:

$$D = \frac{\pi G}{2l_0} R^4. \quad (104.10)$$

Если осуществлять крутящий момент поворотом вокруг оси цилиндра  $OO'$  какой-либо значительной массы, прикрепленной к свободному концу стержня, то согласно основному уравнению динамики вращательного движения можно записать:

$$M = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (104.11)$$

где  $J$  – момент инерции вращающейся массы,  $d^2\alpha/dt^2$  – ее угловое ускорение.

Из формул (104.2) и (104.11) имеем:  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{J}\alpha$ .

Обозначив отношение  $\frac{D}{J}$  через  $\omega^2$ , запишем

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (104.12)$$

Соотношение (104.12) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний с частотой  $\omega$ . Период колебаний системы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (104.13)$$

Из (104.13) находим модуль кручения:

$$D = \frac{4\pi^2 J}{T^2}. \quad (104.14)$$

### Описание рабочей установки и метода измерений

Для определения модуля кручения и модуля сдвига используется крутильный маятник. К нижнему концу вертикально висящей проволоки 1 крепится горизонтально висящий стержень 2 со средним грузом 3 и двумя равными грузами 4, массой  $m$  каждый, которые можно перемещать вдоль стержня 2 (рис. 104.4). Если сообщить этой системе небольшой импульс в плоскости, перпендикулярной оси проволоки, то система начнет совершать крутильные колебания, при которых проволока закручивается то в одну, то в другую сторону. Такое устройство и является крутильным маятником.

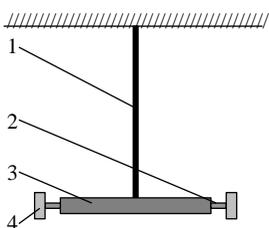


Рис. 104.4

Для того чтобы избежать определения момента инерции системы  $J$ , входящего в формулу (104.14), поступают следующим образом.

Устанавливают каждый из грузов 4 сначала на расстоянии  $l_1$  от оси вращения, а потом на расстоянии  $l_2$  и определяют периоды колебаний системы  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда согласно формуле (104.13) для этих величин можно записать:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{J_2}{J_1}, \quad (104.15)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции системы относительно оси, совпадающей с осью проволоки, при удалении от нее каждого подвижного груза соответственно на  $l_1$  и  $l_2$ . Согласно теореме Штейнера:

$$J_1 = 2ml_1^2 + J_0 \quad \text{и} \quad J_2 = 2ml_2^2 + J_0,$$

где  $J_0$  – момент инерции маятника без грузов относительно оси, проходящей через его центр масс.

Найдя разность  $J_2 - J_1 = 2m(l_2^2 - l_1^2)$  и составив пропорцию с учетом (104.15):

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = \frac{J_2 - J_1}{J_1},$$

получим:

$$J_1 = \frac{2m(l_2^2 - l_1^2)T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (104.16)$$

Подставляя (104.16) в (104.14), получим:

$$D = \frac{8\pi^2 m(l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (104.17)$$

Выражение (104.17) является расчетной формулой при определении модуля кручения проволоки 1. Зная модуль кручения  $D$ , можно найти модуль сдвига  $G$  проволоки из (104.10):

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4}, \quad (104.18)$$

где  $l_0 = L$  – длина проволоки,  $R$  – ее радиус.

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Расположить подвижные грузы на минимальном расстоянии от оси вращения крутильного маятника. Измерить расстояние  $l_1$  от оси маятника до центра подвижного груза.

2. Закручивают маятник на малый угол (не более  $6^0$ ) относительно оси проволоки, после чего предоставляют его самому себе. Маятник начинает совершать колебания в горизонтальной плоскости. Секундомером измерить время  $t_1$  30–50 полных колебаний. Опыт повторяют не менее 5 раз с одним и тем же выбранным числом колебаний. Находят среднее значение  $\langle t_1 \rangle$  и определяют период колебаний:

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n},$$

где  $n$  – число колебаний маятника.

3. Раздвинуть подвижные грузы на максимальное расстояние от оси маятника. Измерить расстояние  $l_2$  от оси маятника до центра подвижного груза.

4. Определить период колебаний маятника  $T_2$  при раздвинутых грузах, измеряя время  $t_2$  не менее 5 раз для того же числа колебаний  $n$ , что и при измерении  $T_1$ .

5. По формуле (104.17) найти среднее значение модуля кручения  $\langle D \rangle$ .

6. Штангенциркулем измерить радиус проволоки  $r$ .

7. По формуле (104.18) определить модуль сдвига материала проволоки. Длина проволоки  $L = 1,82$  м.

8. Методом расчета погрешностей косвенных измерений найти абсолютные погрешности результатов  $\Delta D$  и  $\Delta G$ .

9. Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 104.1*

$n$	$m$	$l_1$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$l_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$\langle D \rangle$	$r$	$\langle G \rangle$	$\Delta D$	$\Delta G$
	кг	м	с	с	с	м	с	с	с	Н·м	м	Н/м <sup>2</sup>	Н·м	Н/м <sup>2</sup>

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
3. Запишите рабочую формулу для определения модуля кручения. При каких условиях справедлива эта формула?
4. Оцените погрешность метода измерений модуля кручения и сдвига.

### Вопросы для защиты работы

1. Каков физический смысл модуля сдвига и модуля кручения?
2. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера и покажите, как она применяется в проделанной работе.
3. Выведите рабочие формулы для определения модуля кручения и модуля сдвига.
4. Пользуясь дифференциальным методом, получите формулы относительных погрешностей  $\Delta D/D$  и  $\Delta G/G$ .
5. Как повысить точность результата эксперимента на данной установке?
6. Какие виды деформации существуют?
7. Что называется абсолютной и относительной деформацией?
8. Запишите закон Гука для деформации сдвига и кручения.
9. Выведите формулу (104.10).
10. Получите формулы (104.17) и (104.18).

### Лабораторная работа № 105

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ ПРИ ПОМОЩИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА**

*Цель работы:* определение скорости пули при помощи баллистического крутильного маятника.

*Приборы и принадлежности:*

баллистический крутильный маятник FPM-09,  
пуля,  
измерительная линейка.

## Общие теоретические сведения

Момент инерции является физической величиной, характеризующей распределение масс в теле, и являющийся мерой инертности тела (аналог массы) при вращательном движении. Моментом инерции материальной точки  $J_i$  относительно, какой-либо оси называется произведение ее массы  $m_i$  на квадрат расстояния до этой оси  $r_i$

$$J_i = m_i r_i^2.$$

Для определения момента инерции твердого тела относительно некоторой оси разобьем его на большое число  $n$  – малых элементов, каждый из которых можно принять за материальную точку. Момент инерции твердого тела относительно оси  $OO'$  (рис. 105.1) равен сумме моментов инерции всех точек относительно этой оси.

Момент инерции тела, имеющего плотность  $\rho$ , вычисляется по формуле

$$J = \int_V \rho r^2 dV,$$

где  $dV$  – элемент объема.

Момент инерции относительно данной оси, как и масса тела, не зависит от характера движения, а зависит от размеров, формы и плотности тела.

Если момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс, равен  $J_0$ , то момент инерции тела  $J$  относительно любой другой оси, параллельной первой, может быть определен на основании теоремы Штейнера:

$$J = J_0 + md^2,$$

где  $m$  – масса тела,  $d$  – расстояние между параллельными осями.

Во вращательном движении аналогом импульса тела является момент импульса. Момент импульса  $L$  материальной точки массой  $m$ , движущейся по окружности радиусом  $r$  со скоростью  $v$  равен:

$$L = mvr.$$

Для определения момента импульса твердого тела, враща-

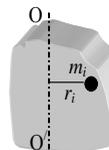


Рис. 105.1

ющегося с угловой скоростью  $\omega$ , выделим  $n$  – малых элементов, каждый из которых можно принять за материальную точку. Момент импульса  $i$ -элемента равен:

$$L_i = m_i v_i r_i, \text{ т.к. } v_i = r_i \omega, \text{ то } L_i = m_i r_i^2 \omega.$$

Момент импульса твердого тела относительно оси вращения  $OO'$  равен сумме моментов импульсов всех точек тела относительно этой оси:

$$L = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n J_i, \quad L = J\omega,$$

т.е. момент импульса твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость. *Основной закон динамики вращательного движения имеет вид*

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt},$$

где  $M$  – величина суммарного момента внешних сил, действующих на тело;  $\omega$  – угловая скорость тела;  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения.

*Если  $M = 0$ , то  $J\omega = const$ . Таким образом, если момент внешних сил относительно некоторой оси вращения равен нулю, то тело будет покоиться или вращаться относительно этой оси бесконечно долго, сохраняя постоянным момент импульса.* Это утверждение, в сущности, является одной из формулировок закона сохранения момента импульса.

Закон сохранения момента импульса для системы тел: *векторная сумма всех моментов импульса относительно любой оси для замкнутой системы взаимодействующих тел остается постоянной:*

$$\sum_{i=1}^n J_i \vec{\omega}_i = const \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0.$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные элементы массой  $m_i$  опишут окружности различных радиусов  $r_i$  и будут иметь различные линейные скорости  $v_i$ ,

а угловая скорость вращения  $\omega$  этих элементов одинакова.

Кинетическая энергия  $i$ -элемента равна:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}, \text{ т.к. } v_i = r_i \omega, \text{ то } E_{ki} = \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2.$$

Кинетическая энергия твердого тела относительно неподвижной оси вращения  $OO'$  равна сумме кинетических энергий всех точек тела относительно этой оси

$$E_{к\text{еп}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2, \quad E_{к\text{еп}} = \frac{J \omega^2}{2},$$

т.е. кинетическая энергия твердого тела относительно неподвижной оси вращения равна половине произведения момента инерции тела относительно этой оси на квадрат угловой скорости.

## 2. Описание рабочей установки и метода измерений

Крутильный баллистический маятник представляет собой массивное тело со значительным моментом инерции, подвешенное на упругой нити.

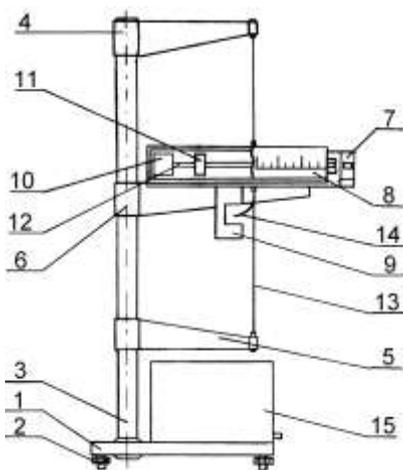


Рис. 105.2

Крутильный маятник ФРМ-09 (рис. 105.2) состоит из основания 1, оснащенного регулируемыми ножками 2, позволяющими установить прибор горизонтально. В основании закреплена колонка 3, на которой закреплены три кронштейна: верхний 4, нижний 5 и средний 6. К среднему кронштейну прикреплены: стреляющее устройство 7, прозрачный экран с нанесенной на нем угловой шкалой 8, фотоэлектрический датчик 9.

К кронштейнам 4 и 6 при помощи зажимов крепится стальная проволока 13, на которой подвешен маятник, состоящий из двух мисочек, наполненных пла-

стилином 10, двух подвижных грузов 11, двух стержней 12, водилки 14.

Фотоэлектрический датчик 9 (рис. 105.2) разъемом соединен с универсальным миллисекундомером ФРМ-14 (15 на рис. 105.2), привинченным к основанию маятника. Универсальный миллисекундомер (рис. 105.3) включает счетчик полных колебаний 2, счетчик времени полных колебаний 3, переключатели «СЕТЬ» 4, «СБРОС» 5, «СТОП» 6.

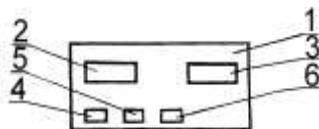


Рис. 105.3

Для определения скорости полета пули используется крутильный баллистический маятник.

Пуля после выстрела застревает в пластине, находящемся в одной из мисочек крутильного маятника, что вызывает отклонение маятника на некоторый угол.

Считая удар неупругим, запишем закон сохранения момента импульса

$$mvr = (J_1 + mr^2)\omega, \quad (105.1)$$

где  $m$  – масса пули,  $v$  – ее скорость,  $r$  – расстояние от оси вращения маятника до точки застревания пули в пластине,  $mvr$  – момент импульса пули,  $\omega$  – угловая скорость,  $J_1$  – момент инерции маятника,  $(J_1 + mr^2)\omega$  – является моментом импульса пули и маятника после выстрела.

Закон сохранения механической энергии (после удара) дает

$$\frac{1}{2}(J_1 + mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}D\alpha^2, \quad (105.2)$$

где  $\frac{1}{2}D\alpha^2$  – максимальная потенциальная энергия маятника при деформации кручения;  $\alpha$  – наибольший угол поворота маятника;  $D$  – модуль кручения,  $\frac{1}{2}(J_1 + mr^2)\omega^2$  – кинетическая энергия маятника при вращательном движении после попадания пули в маятник.

Выразив угловую скорость  $\omega$  из уравнения (105.1) и подставив ее в (105.2), получим

$$v^2 = \frac{D\alpha^2}{m^2 r^2} (J_1 + mr^2) \quad (105.3)$$

Учитывая, что момент инерции пули относительно оси вращения много меньше момента инерции маятника относительно этой же оси ( $mr^2 \ll J_1$ ), можно записать

$$v^2 = \frac{D\alpha^2 J_1}{m^2 r^2}. \quad (105.4)$$

Маятник после попадания пули совершает гармонические колебания. Уравнение движения маятника имеет вид:

$$J_1 \ddot{\alpha} = -D\alpha, \quad (105.5)$$

где  $\ddot{\alpha}$  – угловое ускорение.

Решение уравнения (105.5) приводит к выражению для периода колебаний  $T_1$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}}. \quad (105.6)$$

Аналогично период колебаний для момента инерции  $J_2$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{D}}. \quad (105.6a)$$

Для нахождения  $T_1$  и  $T_2$  каждый из грузов 11 устанавливаются вначале на расстоянии  $R_1$  от оси вращения, а затем на расстоянии  $R_2$ .

На основании формул (105.6) и (105.6a) можно записать

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{J_2}{J_1}, \quad (105.7)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции маятника относительно оси, совпадающей с осью проволоки, при удалении от нее каждого подвижного груза 11 соответственно на  $R_1$  и  $R_2$ .

Согласно теореме Штейнера:

$$J_1 = J_0 + 2MR_1^2, \quad (105.8)$$

$$J_2 = J_0 + 2MR_2^2, \quad (105.9)$$

где  $J_0$  – общий момент инерции всех тел системы относительно осей, проходящих через центр масс каждого тела;  $M$  – масса одного груза.

Найдя разность

$$J_2 - J_1 = 2M(R_2^2 - R_1^2) \quad (105.10)$$

с учетом (105.7), составим пропорцию

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = \frac{J_2 - J_1}{J_1}, \quad (105.11)$$

получим

$$J_1 = \frac{2M(R_2^2 - R_1^2)T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (105.12)$$

Выразим  $J_1$  из (105.6) и приравняем полученное выражение с (105.12), получим для модуля кручения

$$D = \frac{8\pi^2 M(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (105.13)$$

Подставив (105.12) и (105.13) в (105.4) запишем

$$v = \frac{4\pi\alpha M}{mr} \cdot \frac{T_1}{T_2^2 - T_1^2} (R_2^2 - R_1^2) \quad (105.14)$$

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Включить сетевой шнур измерителя в сеть, нажать клавишу «СЕТЬ», проверяя, все ли индикаторы измерителя высвечивают цифру ноль, светится ли лампочка фотоэлектрического датчика.

2. Пулю закрепить в стреляющем устройстве.

3. Расположить подвижные грузы (11) на минимальном расстоянии от оси вращения крутильного маятника. Измерить расстояние  $R_1$  от оси вращения до центра подвижного груза.

4. Крутильный маятник установить на черте  $0^\circ$  угловой шкалы.

5. Произвести выстрел, измеряя максимальный угол  $\alpha$  поворота маятника по угловой шкале (в радианах) и расстояние  $r$  от оси вращения маятника до точки застревания пули в пластине.

6. Отклонить рукой маятник на максимальный угол ( $\alpha$ ), нажать клавишу «СБРОС», одновременно пустив маятник, измерить время десяти полных колебаний, нажать клавишу «СТОП» в конце измерения. Опыт повторяют 5 раз с одним и тем же числом колебаний. По результатам пяти измерений вычислить среднее арифметическое значение времени колебаний  $\langle t_1 \rangle$  и определить период колебаний по формуле

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n},$$

где  $n$  – число полных колебаний маятника.

7. Раздвинуть подвижные грузы на максимальное расстояние от оси вращения и измерить расстояние  $R_2$  от оси вращения до центра подвижного груза. Согласно пункту 6 определить период колебаний  $T_2$  через среднее значение времени  $\langle t_2 \rangle$ .

8. Вычислить скорость пули  $v$  по формуле (105.14). Масса пули  $m = 2,03$  г. Масса подвижного груза  $M = 200$  г.

9. Методом расчета погрешностей косвенных измерений находят относительную  $E$  и абсолютную погрешности  $\Delta v$ .

10. Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 105.1*

$\alpha$	$M$	$m$	$r$	$R_1$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$R_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$v$	$\Delta v$	$E$
рад	кг	кг	м	м	с	с	с	м	с	с	с	м/с	м/с	%

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
3. Запишите рабочую формулу для определения скорости полета пули.
4. На основе каких законов получена рабочая формула?
5. Оцените погрешность метода измерения скорости пули.

## Вопросы для защиты работы

1. Какой удар называется абсолютно упругим, неупругим?
2. Что называется моментом силы, моментом импульса, моментом инерции материальной точки, твердого тела?
3. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения, закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Назовите виды механической энергии. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
6. Выведите рабочую формулу (105.14).
7. Есть ли критические замечания к рабочей установке (как повысить точность результата эксперимента)? Какой еще эксперимент можно осуществить на данной установке?

## Лабораторная работа № 106

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Цель работы:* определение скорости пули с помощью баллистического маятника с использованием законов сохранения импульса и энергии.

*Приборы и принадлежности:*

баллистический маятник,  
пружинный пистолет,  
зеркальная шкала,  
измерительная линейка,  
пуля.

### Основные теоретические сведения

Из практики известно, что скорость полета пули достигает значительной величины. Поэтому прямое измерение скорости, т.е. определение времени, за которое пуля проходит известное расстояние, требует специальной аппаратуры. Много проще измерять скорость пули косвенными методами, среди которых широко распространены методы, использующие неупругие соударения, т.е. соударения, в результате которых столкнувшиеся тела соединяются вместе и продолжают движение как одно целое.

Пусть летящая пуля испытывает неупругий удар со свободным неподвижным телом значительно большей массы. После удара тело начинает двигаться, причем скорость его во столько раз меньше скорости пули, во сколько раз масса пули меньше массы тела. (Этот результат можно получить с помощью закона сохранения импульса). Если теперь измерить сравнительно небольшую скорость тела, то легко можно вычислить и скорость полета пули.

К числу методов, основанных на этой идее, относится и метод баллистического маятника. В данной работе для определения скорости пули использованы законы сохранения импульса и полной механической энергии.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Баллистический маятник представляет собой тяжелое тело массой  $M$ , подвешенное на двойном бифилярном подвесе (рис. 106.1). Когда после выстрела пуля попадает в это тело, то оно отклоняется от положения равновесия.

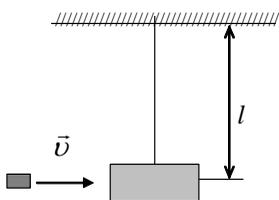


Рис. 106.1

*Пренебрегая сопротивлением воздуха, к системе «маятник-пуля» можно применить закон сохранения импульса, который в проекции на ось  $x$  запишется*

$$mv = (M + m)U, \quad (106.1)$$

где  $mv$  – проекция импульса на ось  $x$  до взаимодействия;  $(M+m)U$  – проекция импульса системы (пуля + маятник) на ось  $x$  после неупругого удара.

#### Закон сохранения импульса:

*в изолированной системе тел векторная сумма импульсов взаимодействующих тел остается постоянной во времени, т.е.  $\sum_i m_i \vec{v}_i = const$ .*

#### Закон сохранения механической энергии:

*в изолированной системе тел, где действуют только консервативные силы, полная механическая*

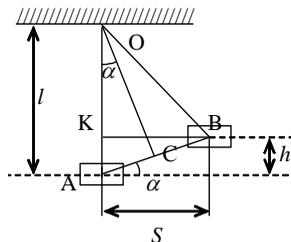


Рис. 106.2

энергия (кинетическая плюс полная потенциальная энергия) остается постоянной, т.е.  $E = E_k + E_n = \text{const}$ .

При ударе пули маятник вместе с пулей приобретает кинематическую энергию, равную после соударения

$$E_k = \frac{(m + M)U^2}{2}. \quad (106.2)$$

Маятник с пулей приходит в движение, отклоняется на некоторый угол от вертикали, и центр масс системы «маятник-пуля» поднимается на некоторую высоту  $h$  (рис. 106.2).

Если пренебречь трением в подвесе маятника и сопротивлением воздуха, то можно рассматривать систему «маятник-пуля» как изолированную, консервативную и применять к ней закон сохранения полной механической энергии.

В момент наибольшего отклонения маятника его кинетическая энергия  $E_k$  полностью превратится в потенциальную энергию силы тяжести

$$\frac{(M + m)U^2}{2} = (M + m)gh, \quad (106.3)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения тела. Тогда

$$U = \sqrt{2gh}. \quad (106.4)$$

Подставив (106.4) в (106.1), найдем выражение для скорости пули:

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (106.5)$$

Следовательно, скорость пули можно вычислить, если измерить высоту подъема  $h$  центра масс маятника. Однако измерение  $h$  довольно сложно. Его можно заменить более простым измерением горизонтального перемещения  $S$ , которое определяют по неподвижной шкале.

Если после соударения маятник отклонился на небольшой угол (рис. 106.2), то можно считать, что центр масс маятника перемещается вдоль хорды  $AB$ . Тогда из подобия треугольников  $AKB$  и  $OAC$  можно записать отношение

$$\frac{OC}{BK} = \frac{AC}{AK}, \quad (106.6)$$

где  $BK = S$  – горизонтальное смещение маятника;  $AK = h$ ,  $OC \perp AB$ .

При малом отклонении  $S$  и достаточной длине подвеса  $l$  ( $S \ll l$ ) можно положить, что

$$OC = l \quad \text{и} \quad AC = \frac{S}{2}.$$

Тогда соотношение (106.6) можно записать в виде

$$\frac{l}{S} = \frac{S}{2h} \quad \text{или} \quad h = \frac{S^2}{2l} \quad (106.7)$$

Поставив (106.7) в (106.5), получим формулу для скорости пули:

$$\langle v \rangle = \frac{M + m}{m} \cdot \langle S \rangle \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (106.8)$$

Формула (106.8) является расчетной. Здесь  $\langle v \rangle$  – среднее значение скорости пули, определяемое через среднее горизонтальное смещение  $\langle S \rangle$  маятника. Определяя величины  $M$ ,  $m$ ,  $S$  и  $l$  экспериментально, по формуле (106.8) можно вычислить скорость пули  $v$ .

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Привести маятник в состояние равновесия и подвесить шкалу под указатель маятника.
2. Произвести 5 – 6 выстрелов, каждый раз отмечая смещения  $S$  указателя по шкале. Результаты измерений записать в таблицу. Определить среднее арифметическое значение смещения  $\langle S \rangle$ .
3. Вычислить скорость пули по формуле (106.8), взяв значения масс  $m$ ,  $M$  и длины подвеса  $l$  у лаборанта или преподавателя.

Форма таблицы результатов 106.1

№	$S$	$\langle S \rangle$	$\Delta S$	$M$	$m$	$l$	$g$	$\langle v \rangle$	$\Delta v$	$E$
	м	м	м	кг	кг	м	м/с <sup>2</sup>	м/с	м/с	%

4. Вычислить абсолютную погрешность прямых многократных измерений  $S$  по формуле:

$$\Delta S = t_{p(n)} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \langle S \rangle)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p(n)}$  – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $p = 0,95$  и числа измерений  $n$ .

5. Вычислить относительную погрешность измерения скорости пули

$$E = \frac{\Delta v}{\langle v \rangle} = \frac{\Delta M + \Delta m}{M + m} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta l}{l} \right).$$

6. Найти абсолютную погрешность  $\Delta v = \langle v \rangle \cdot E$ .

7. Окончательный результат записать в виде  $v = \langle v \rangle \pm \Delta v$ .

### Вопросы для допуска к работе

1. Изложите цель работы, назначение приборов и принадлежностей.

2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.

3. Какие допущения возможны, если рассматривать систему «маятник-пуля» как замкнутую?

4. Напишите рабочую формулу, примененную в данной работе.

5. Какие законы используются для получения расчетной формулы (106.8)?

6. Как в установке обеспечить условия, при которых удар пули в маятник можно считать неупругим, центральным и прямым?

## Вопросы для защиты работы

1. Что называется импульсом тела и в каких единицах он измеряется в системе СИ?
2. При каком условии систему «маятник-пуля» можно рассматривать как изолированную?
3. В чем состоит закон сохранения импульса? К каким системам он применим? Дайте вывод этого закона и приведите примеры его проявления (его действия).
4. Как найти изменение импульса неизолированной системы?
5. Какие существуют виды механической энергии. Дайте их определения.
6. Для каких систем справедлив закон сохранения механической энергии и как он формулируется?
7. Выведите формулу кинетической энергии.
8. Выведите расчетную формулу.
9. Какой удар называют абсолютно упругим и какой абсолютно неупругим?

## Лабораторная работа № 107

### ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Цель работы:* экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека.

*Приборы и принадлежности:*

маятник Обербека с миллисекундомером FPM–15, штангенциркуль.

### Основные теоретические сведения

При рассмотрении вращения твердого тела с динамической точки зрения наряду с понятием сил вводится понятие момента сил и наряду с понятием массы – понятие момента инерции.

Пусть материальная точка массой  $m$  под действием внешней силы  $\vec{F}$  движется криволинейно относительно неподвижной точки  $O$ . На материальную точку действует момент силы и точ-

ка обладает моментом импульса. Положение движущейся материальной точки определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным к ней из точки  $O$  (рис. 107.1).

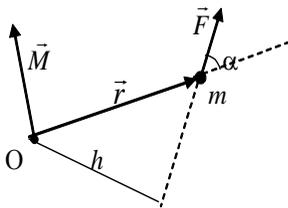


Рис. 107.1

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной точки  $O$  называется векторная величина  $\vec{M}$ , равная векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$  на вектор силы  $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (107.1)$$

Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно плоскости векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  и его направление соответствует правилу правого винта. Модуль момента сил равен

$$M = Fr \sin \alpha = Fh, \quad (107.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ,  $h = r \cdot \sin \alpha$  – плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от точки  $O$  до линии действия силы  $\vec{F}$ .

Моментом импульса  $\vec{L}$  относительно точки  $O$  называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$  на вектор импульса  $\vec{p} = m\vec{v}$ , то есть

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{v}]. \quad (107.3)$$

Вектор  $\vec{L}$  направлен перпендикулярно плоскости векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  (рис. 107.2). Модуль момента импульса равен

$$L = rmv \sin \beta. \quad (107.4)$$

где  $\beta$  – угол между направлением векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ .

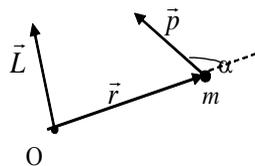


Рис. 107.2

### Основной закон динамики вращательного движения

Пусть механическая система, состоящая из  $N$  материальных точек под действием внешних сил, результирующая которых

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , совершает криволинейное движение относительно неподвижной точки О, то есть

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i], \quad (107.5)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, проведенный от точки О до  $i$ -ой материальной точки,  $\vec{F}_i$  – вектор силы, действующей на  $i$ -ую материальную точку. Также можно найти момент импульса системы

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times m \vec{v}_i], \quad (107.6)$$

где  $\vec{L}_i$  – момент импульса  $i$ -ой материальной точки.

Момент импульса  $\vec{L}$  зависит от времени  $t$ , так как скорость является функцией времени. Взяв производную от момента импульса системы по времени  $t$ , получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (107.7)$$

*Формула (107.7) является математическим выражением основного закона динамики вращательного движения системы, согласно которому скорость изменения момента импульса системы по времени относительно некоторой оси равна результирующему моменту внешних сил, действующих на систему, относительно этой же оси.*

Закон (107.7) справедлив и для твердого тела, т.к. твердое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек.

Пусть в частном случае твердое тело вращается относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс, под действием внешней силы  $\vec{F}$ . Твердое тело разбиваем на материальные точки. Для материальной точки массой  $m_i$  уравнение движения запишется

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i. \quad (107.8)$$

Момент импульса  $\vec{L}_i$  для  $i$ -ой материальной точки равен

$$L_i = r_i m_i v_i \sin \beta. \quad (107.9)$$

Поскольку при вращательном движении  $\beta = 90^\circ$ , то и линейная скорость  $\vec{v}_i$  связана с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  формулой  $v_i = \omega r_i$ . Тогда (107.9) можно записать в виде

$$L_i = m_i r_i^2 \omega. \quad (107.10)$$

Величина  $J_i = m_i r_i^2$  представляет собой момент инерции материальной точки относительно оси  $Z$ . Тогда (107.10) примет вид

$$L_i = J_i \omega. \quad (107.11)$$

С учетом (107.11) основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси запишется

$$\frac{d \sum \vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum J_i \vec{\omega} = \vec{M},$$

где  $\sum_i J_i = J$  – момент инерции твердого тела относительно оси  $Z$ .

При  $J = \text{const}$

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}, \quad (107.12)$$

где  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  – угловое ускорение. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (107.12) результирующий момент внешних сил, действующих на тело, относительно некоторой оси равен произведению момента инерции  $J$  тела на его угловое ускорение относительно этой же оси.

Из уравнения (107.12) следует, что при  $J = \text{const}$  угловое ускорение тела прямо пропорционально моменту внешних сил относительно оси вращения, т.е.

$$\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = M_1 / M_2. \quad (107.13)$$

При  $M = \text{const}$  угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции тела, т.е.

$$\varepsilon' / \varepsilon_2 = J_2 / J'. \quad (107.14)$$

Целью настоящей работы является проверка соотношений (107.13) и (107.14), а, следовательно, и основного уравнения динамики вращательного движения (107.12), следствиями которого они являются.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Для проверки соотношений (107.13) и (107.14) используется маятник Обербека, представляющий собой инерционное колесо в виде крестовины (см. рис. 107.3). На четырех взаимно перпендикулярных стержнях 1 расположены четыре одинаковых цилиндрических груза 2, которые можно перемещать вдоль стержней и закреплять на определенном расстоянии от оси. Грузы закрепляются симметрично, т.е. так, чтобы их центр масс совпал с осью вращения. На горизонтальной оси крестовины имеется двухступенчатый диск 3, на который наматывается нить. Один конец нити прикреплен к диску, а ко второму концу нити подвешен груз 4, под действием которого прибор приводится во вращение.

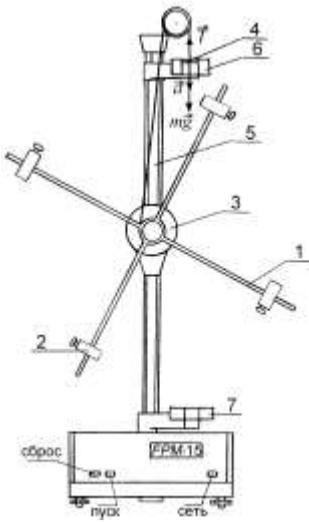


Рис. 107.3.

Маятник Обербека

Для удержания системы крестовины вместе с грузами в состоянии покоя используется тормозной электромагнит. С целью отсчета высоты падения грузов на колонне нанесена миллиметровая шкала 5. Время падения груза 4 измеряется миллисекундомером ФРМ-15, к которому подключены фотоэлектрические датчики №1 (6) и №2(7). Фотоэлектрический датчик №2 (7) вырабатывает электроимпульс конца измерений времени и включает тормозной электромагнит.

Если предоставить возможность грузу 4 двигаться, то это движение будет происходить с ускорением  $a$ :

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (107.15)$$

где  $t$  – время движения груза с высоты  $h$ . При этом шкив со стержнями и находящимися на них грузами будет вращаться с угловым ускорением  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad (107.16)$$

где  $r$  – радиус шкива.

Вращающий момент силы, приложенной к крестовине и сообщающий угловое ускорение вращающейся части прибора, находим по формуле

$$M = T \cdot r, \quad (107.17)$$

где  $T$  – сила натяжения шнура. По второму закону Ньютона для груза 4 имеем

$$mg - T = ma, \quad (107.18)$$

откуда

$$T = m(g - a), \quad (107.19)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Из формул (107.12), (107.15–107.17) и (107.19) получим

$$M = m(g - a) \cdot r, \quad (107.20)$$

$$J = \frac{mr^2(g - a)}{a}. \quad (107.21)$$

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Измерить штангенциркулем радиус большого и малого шкивов  $r_1$  и  $r_2$ .
2. Определить массу груза 4 взвешиванием на технических весах с точностью  $\pm 0,1$  г.

3. Проверить соотношение (107.13). Для этого:

- закрепить цилиндрические подвижные грузы на стержнях на ближайшем расстоянии от оси вращения так, чтобы крестовина была в положении безразличного равновесия;
- намотать нить на большой шкив радиуса  $r_1$  и измерить время движения груза  $t_1$  с высоты  $h$  миллисекундомером, для чего:
  - включить сетевой шнур измерителя в сеть питания;
  - нажать клавишу «СЕТЬ» и проверить, показывают ли все индикаторы измерителя нуль и горят ли все индикаторы обоих фотоэлектрических датчиков;
  - переместить груз в верхнее положение и проверить, находится ли схема в состоянии покоя;
  - нажать клавишу «ПУСК» и миллисекундомером измерить время движения груза;
  - нажать клавишу «СБРОС» и проверить, произошло ли обнуление показаний измерителя и освобождение блокировки электромагнитом;
  - переместить груз в верхнее положение, отжать клавишу «ПУСК» и проверить, произошла ли повторная блокировка схемы;
- опыт повторить 5 раз. Высоту  $h$  не рекомендуется менять в течение всей работы;
- по формулам (107.15), (107.16), (107.20) вычислить значения  $a_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $M_1$ ;
- не меняя расположения подвижных грузов и оставляя тем самым неизменным момент инерции системы, опыт повторить, наматывая нить с грузом на малый шкив радиусом  $r_2$ ;
- по формулам (107.15), (107.16), (107.20) вычислить значения  $a_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $M_2$ ;
- проверить справедливость следствия основного закона динамики вращательного движения:

$$M_1 / M_2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_2, \text{ при } J = \text{const.}$$

- данные результатов измерений и вычислений занести в таблицы 107.1 и 107.2.

4. Проверить соотношение (107.14). Для этого:

- раздвинуть подвижные грузы до упоров на концах стержней, но так, чтобы крестовина снова была в положении безразличного равновесия;
- для малого шкива  $r_2$  определить время движения груза  $t'$  по данным 5 опытов;
- по формулам (107.15), (107.20), (107.21) определить значения  $a', \varepsilon', J'$ ;
- при проверке соотношения  $\varepsilon' / \varepsilon_2 = J_2 / J'$  при  $M = \text{const}$  используют значения предыдущего опыта (см. таблицу 107.2);
- по формуле (107.21) определить значение  $J_2$  по данным таблицы 107.2;
- вычислить соотношения  $\varepsilon' / \varepsilon_2$  и  $J_2 / J'$ ;
- результаты измерений и вычислений занести в таблицу 107.3.

*Форма таблицы результатов 107.1*

$r_1$	$m$	$h$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$a_1$	$\varepsilon_1$	$M_1$
м	кг	м	с	с	м/с <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>	Н·м

*Форма таблицы результатов 107.2*

$r_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$a_2$	$\varepsilon_2$	$M_2$	$M_1/M_2$	$\varepsilon_1/\varepsilon_2$
м	с	с	м/с <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>	Н·м		

*Форма таблицы результатов 107.3*

$r_2$	$t'$	$\langle t' \rangle$	$a'$	$\varepsilon'$	$J'$	$a_2$	$J_2$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon' / \varepsilon_2$	$J_2 / J'$
м	с	с	м/с <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>		

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Поясните физический смысл величин, входящих в данный закон, укажите единицы их измерения в «СИ».
3. Опишите устройство рабочей установки.
4. Оцените погрешность метода измерений величины углового ускорения.

### Вопросы для защиты работы

1. Дайте определения момента сил, момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки  $O$ .
2. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной точки  $O$  и неподвижной оси  $Z$ .
3. Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела.
4. Выведите рабочие формулы.
5. Выведите соотношение  $\varepsilon = f(J)$  при  $M = \text{const}$  и  $\varepsilon = f(M)$  при  $J = \text{const}$ .
6. Есть ли критические замечания к данной работе?

Лабораторная работа № 108

### МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

*Цель работы:* определение момента инерции маятника Максвелла.

*Приборы и принадлежности:*  
маятник Максвелла FPM–03,  
комплект сменных колец.

### Основные теоретические сведения

Момент инерции – аналог массы (см. лаб. раб. № 105). Как масса является мерой инертности при поступательном движении, так и момент инерции является мерой инертности при вращательном движении. При вращении тела вокруг различных

осей моменты инерции различны. Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением элементарных масс тела – геометрией тела. Аналитическое вычисление величины момента инерции производится путем интегрирования выражения

$$J = \int r^2 \rho dV,$$

где  $\rho$  – плотность вещества в элементе объема  $dV$ , находящегося на расстоянии  $r$  от оси вращения.

При сложной форме поверхности тела и неравномерном распределении плотности аналитический подсчет величины момента инерции может быть достаточно сложной задачей.

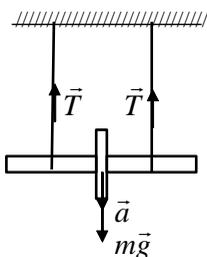


Рис. 108.1

Экспериментальное же определение момента инерции осуществить легко. В настоящей работе измеряется момент инерции металлических колец с помощью маятника Максвелла.

*Маятник Максвелла* – небольшой ролик, насаженный туго на ось, опускается под действием силы тяжести на двух нитях, предварительно намотанных на ось диска (рис. 108.1). Нити во время движения вниз разматываются до полной длины, раскрутившийся диск продолжает вращательное движение и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять будет опускаться вниз и т.д. Диск будет совершать колебания вверх и вниз, поэтому такое устройство называется маятником.

Уравнение движения маятника Максвелла можно записать, используя основной закон динамики поступательного и вращательного движений. Уравнения движения маятника Максвелла без учета сил трения имеют вид:

а) для поступательного движения, исходя из II закона Ньютона

$$ma = mg - 2T, \quad (108.1)$$

б) для вращательного движения

$$M = 2T \cdot r = J \cdot \varepsilon, \quad (108.2)$$

где  $m$  – масса маятника;  $T$  – сила натяжения одной нити;  $M$  – момент сил натяжения обеих нитей, сообщающих маятнику вращательное движение относительно его геометрической оси;  $r$  – радиус оси маятника (стержня) вместе с намотанной на нее нитью подвески;  $J$  – момент инерции маятника относительно этой же оси вращения.

Связь между тангенциальным ускорением ( $\vec{a}$ ) поступательного движения и угловым ускорением ( $\vec{\varepsilon}$ ) вращательного движения имеет вид:

$$a = \varepsilon \cdot r. \quad (108.3)$$

Ускорение  $a$  может быть найдено через измеренное время движения  $t$  и проходимое маятником расстояние  $h$  из известной формулы кинематики:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (108.4)$$

Из уравнений (108.1) – (108.4) может быть получена расчетная формула для момента инерции маятника Максвелла:

$$J = \frac{1}{4} m D^2 \left( \frac{g t^2}{2h} - 1 \right), \quad (108.5)$$

где  $D$  – внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на нее нитью подвески определяется по формуле

$$D = D_0 + 2D_n, \quad (108.6)$$

где  $D_0$  – диаметр оси маятника в м;  $D_n$  – диаметр нити подвески в м;  $h$  – длина маятника, равная высоте, на которую он поднимается в м;  $m$  – масса маятника вместе с кольцом в кг:

$$m = m_0 + m_p + m_k, \quad (108.7)$$

где  $m_0$  – масса оси маятника (стержня) в кг;  $m_p$  – масса ролика в кг;  $m_k$  – масса кольца, аксиально насаженного на ролик в кг.

## Описание рабочей установки и метода измерений

Параметры маятника:

- максимальная длина маятника  $h = 410$  мм;
- количество сменных колец 3;
- размеры маятника: диаметр оси маятника  $D_0 = 10$  мм; внешний диаметр ролика  $D_p = 86$  мм; внешний диаметр колец  $D_k = 105$  мм; диаметр нити подвески  $D_n = 0,5$  мм.

Общий вид маятника FPM показан на рис. 108.2.

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка 3, к которой прикреплен неподвижный верхний кронштейн 4 и подвижный нижний 5. На верхнем кронштейне находится электромагнит 6, фотоэлектрический датчик 7 и вороток 8 для закрепления и регулирования длины бифилярной подвески маятника.

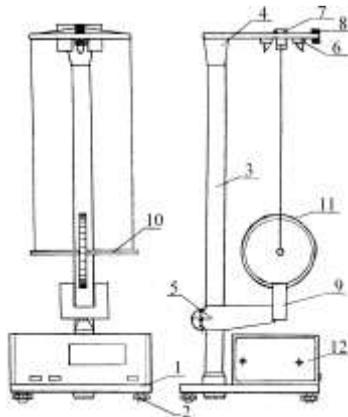


Рис. 108.2.

Маятник Максвелла

Нижний кронштейн вместе с прикрепленным к нему вторым фотоэлектрическим датчиком 9 можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно избранном положении.

Маятник 10 – это ролик, закрепленный на оси и подвешенный по бифилярному способу, на который накладываются сменные кольца 11, изменяя, таким образом, момент инерции системы.

Маятник с наложенным кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Длина маятника определяется по миллиметровой шкале на колонке прибора. С целью облегчения этого измерения нижний кронштейн оснащен красным указателем, помещенным на высоте оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика.

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Включить сетевой шнур измерителя в сеть, нажать клавишу «СЕТЬ», проверяя, все ли индикаторы измерителя высвечивают цифру ноль, и засветилась ли лампочка фотоэлектрического датчика?

2. Нижний кронштейн прибора передвинуть и зафиксировать в крайнем нижнем положении.

3. На ролик маятника надеть кольцо, прижимая его до упора.

4. На ось маятника намотать нить подвески и зафиксировать ее. Проверить, отвечает ли нижняя грань кольца нулю шкалы на колонке. Если нет, отвинтить верхний кронштейн и отрегулировать его высоту. Привинтить верхний кронштейн.

5. Нажать клавишу «ПУСК» миллисекундомера FPM-03.

6. Открутить гайку воротка для регулирования длины библиарной подвески. Определить длину нити таким образом, чтобы край стального кольца после опускания маятника находился на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика. Одновременно произвести корректировку установки маятника, чтобы его ось была параллельна основанию прибора. Закрутить гайку воротка.

7. Отжать клавишу «ПУСК» миллисекундомера FPM-03.

8. Намотать на ось маятника нить подвески, обращая внимание на то, чтобы она наматывалась равномерно.

9. Зафиксировать маятник при помощи электромагнита.

10. Повернуть маятник в направлении его движения на угол около  $5^0$ .

11. Нажать клавишу «СБРОС».

12. Нажать клавишу «ПУСК».

13. Определить значение времени падения маятника. Опыт повторить 5 – 10 раз.

14. Определить среднее значение времени падения маятника по формуле  $\langle t \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ , где  $n$  – количество выполненных

замеров;  $t_i$  – значение времени, полученное в  $i$ -ом замере.

15. Со шкалы на вертикальной колонке прибора определить длину маятника.

16. Используя формулу (108.6) и известные значения диаметров  $D_0$  и  $D_n$ , определить диаметр оси вместе с намотанной на неё нитью.

17. По формуле (108.7) вычислить массу  $m_1$  маятника вместе с аксиально наложенным кольцом, массой  $m_{к1}$ . Значения масс отдельных элементов нанесены на них.

18. По формуле (108.5), используя среднее значение времени  $\langle t_1 \rangle$  определить момент инерции  $J_1$  маятника.

19. Снять первое съемное кольцо и насадить на ролик второе кольцо массы  $m_{к2}$ , затем третье кольцо массы  $m_{к3}$ . Опыт повторить согласно пунктам (7) – (18).

20. Оценить относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta J$  погрешность результатов измерений.

21. Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицы. Так как момент инерции изменяется для трех колец, то нужно составить три аналогичные таблицы (см. ниже). Для каждого кольца измерения проводят не менее 5-ти раз.

*Форма таблицы результатов 108.1*

№	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$h$	$D$	$m_1$	$J_1$	$\Delta J_1$	$E_1$
	с	с	м	м	кг	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	%

### **Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Дать определение момента инерции.
3. Записать формулу момента инерции маятника Максвелла и пояснить величины, входящие в нее.
4. Описать рабочую установку и ход работы.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Записать основной закон динамики для поступательного и вращательного движения твердого тела.
2. Вывести формулу для момента инерции маятника Максвелла.
3. Записать закон сохранения механической энергии для маятника Максвелла.

4. Получить дифференциальным методом формулу для расчета относительной погрешности  $E$ .

5. Дать определение момента инерции материальной точки и твердого тела относительно неподвижной оси.

### Лабораторная работа № 109

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Цель работы:* экспериментальное определение момента инерции диска методом крутильных колебаний.

*Приборы и принадлежности:*

диск на упругой проволоке,  
дополнительные грузы (цилиндры или шары),  
секундомер,  
линейка,  
штангенциркуль.

### Общие теоретические сведения

Как известно из динамики, момент инерции является физической величиной, характеризующей распределение масс в теле и являющейся мерой инертности тела при вращательном движении.

Моментом инерции материальной точки относительно какой-либо оси называется произведение ее массы на квадрат расстояния до этой оси

$$J = mr^2.$$

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси  $OO$ , проходящей через его центр масс, равен сумме моментов инерции всех точек тела относительно этой оси (рис.109.1):

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (109.1)$$

Момент инерции тела плотностью  $\rho$ , вычисляется по формуле

$$J = \int_V \rho r^2 dV, \quad (109.2)$$

где  $dV$  – элемент объема. Как видно из формул (109.1) и (109.2), момент инерции относительно данной оси, как и масса тела, не зависит от характера движения, а зависит от размеров, формы и плотности тела.

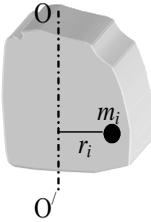


Рис. 109.1

Если момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, равен  $J_0$ , то момент инерции тела относительно любой другой оси, параллельной первой, может быть определен на основании теоремы Штейнера

$$J = J_0 + md^2, \quad (109.3)$$

где  $m$  – масса тела,  $d$  – расстояние между осями.

Основной закон динамики вращательного движения имеет вид:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Момент импульса  $\vec{L}$  тела при вращательном движении вычисляют по формуле  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ , тогда

$$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}, \quad (109.4)$$

где  $\vec{M}$  – величина суммарного момента внешних сил, действующих на тело,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость тела. Если  $\vec{M} = 0$ , то  $J\vec{\omega} = \text{const}$ . Таким образом, если момент внешних сил, действующих на тело относительно некоторой оси, равен нулю, т.е. система замкнута, то тело будет покоиться или вращаться бесконечно долго относительно этой оси, сохраняя постоянный момент импульса. Это утверждение, в сущности, является одной из формулировок закона сохранения момента импульса, то есть математически закон сохранения момента импульса для системы тел запишется в виде

$$\sum_{i=1} J_i \vec{\omega}_i = \text{const}, \text{ при } \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0,$$

где  $J_i \vec{\omega}_i$  – момент импульса  $i$ -го тела.

В случае вращательного движения момент инерции играет ту же роль, что и масса при поступательном движении, а угловая скорость – роль линейной.

Ниже приведена таблица 109.1, в которой сопоставлены величины и соотношения, являющиеся эквивалентными при поступательном и вращательном движении.

Таблица 109.1

Поступательное движение	Вращательное движение
Линейная скорость $\vec{v}$	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Линейное ускорение $\vec{a}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$
Масса $m$	Момент инерции $J$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Второй закон Ньютона:	Основной закон динамики:
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Кинетическая энергия	Кинетическая энергия
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$

### Описание рабочей установки и метода измерений

Момент инерции тела правильной геометрической формы может быть вычислен теоретически по формуле (109.2). Если же тело имеет сложную форму (маховое колесо, коленчатый вал, винт и др.), то теоретическое определение его момента инерции представляет значительные трудности.

Одним из методов экспериментального определения момента инерции является метод крутильных колебаний. Подвесим испытуемое тело (диск 1) на упругой металлической проволоке 2 так, чтобы один конец проволоки проходил через центр масс тела, а другой был закреплен неподвижно в точке подвеса

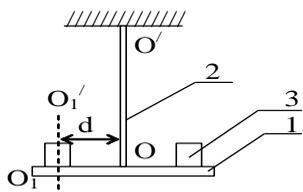


Рис. 109.2

(рис. 109.2). Если повернуть диск на небольшой угол около оси, совпадающей с осью проволоки, после чего предоставить его самому себе, то тело начнет совершать колебательное движение в горизонтальной плоскости. Вращательный момент  $M$ , закручивающий проволоку на угол  $\alpha$ , равен

$$M = -D\alpha, \quad (109.5)$$

где  $D$  – модуль кручения материала проволоки. Знак минус показывает, что реакция сил упругости в проволоке, возрастающая с увеличением угла  $\alpha$ , направлена в сторону, противоположную действию вращательного момента.

С другой стороны, из основного уравнения динамики вращательного движения (109.4) при  $J = \text{const}$

$$M = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (109.6)$$

где  $J$  – момент инерции тела (диска) относительно оси вращения,  $d^2\alpha/dt^2 = \varepsilon$  – угловое ускорение тела.

Из формул (109.5) и (109.6) имеем

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{J}\alpha.$$

Сравнивая с дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0, \quad (109.7)$$

приходим к выводу, что угловая частота крутильных колебаний  $\omega$  может быть определена, как

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}.$$

Период колебаний маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}},$$

откуда

$$D = \frac{4\pi^2 J}{T^2}. \quad (109.8)$$

Исключим из формулы (109.8) неизвестную величину  $D$ . Для этого на тело, симметрично оси колебаний  $OO'$  поместим добавочные грузы 3 (например, два равных цилиндра или шара). Тогда период колебаний этой системы будет равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_1}{D}},$$

откуда

$$D = \frac{4\pi^2(J_1 + J)}{T_1^2}.$$

Приравняв выражения для  $D$ , получим

$$J = \frac{T^2 J_1}{T_1^2 - T^2}, \quad (109.9)$$

где  $T_1$  и  $T$  – периоды крутильных колебаний соответственно с добавочными грузами и без них,  $J_1$  – момент инерции двух добавочных грузов одинаковой массы (цилиндров или шаров) относительно оси вращения  $OO'$ .

Момент инерции цилиндра относительно оси  $O_1O_1'$ , проходящий через его центр масс

$$J_0 = \frac{1}{2}mr^2,$$

где  $m$  – масса цилиндра,  $r$  – его радиус. По теореме Штейнера (109.3) момент инерции двух цилиндров относительно оси  $OO'$

$$J_1 = 2\left(\frac{1}{2}mr^2 + md^2\right), \quad (109.10)$$

где  $d$  – расстояние между  $OO'$  и  $O_1O_1'$ .

Из уравнений (109.9) и (109.10) момент инерции исследуемого тела в случае использования в качестве дополнительных грузов **цилиндров** определяется по формуле

$$J = m(2d^2 + r^2) \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (109.11)$$

Момент инерции шара относительно оси  $O_1O_1'$ , проходящей через центр масс:

$$J_0 = \frac{2}{5} mr^2,$$

где  $m$  – масса шара,  $r$  – его радиус. По формуле (109.3) момент инерции двух шаров относительно оси  $OO'$  выразится:

$$J_1 = 2\left(\frac{2}{5} mr^2 + md^2\right), \quad (109.12)$$

где  $d$  – расстояние между  $OO'$  и  $O_1O_1'$ .

Из уравнений (109.9) и (109.10) момент инерции исследуемого тела в случае использования в качестве дополнительных грузов **шаров** определяется по формуле

$$J = m\left(2d^2 + \frac{4}{5} r^2\right) \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (109.13)$$

Исследуемое тело представляет собой диск, который можно считать приближенно сплошным и однородным. Момент инерции сплошного однородного диска относительно оси  $OO'$  определяется по формуле

$$J_{\text{пров}} = \frac{m_1 R^2}{2}, \quad (109.14)$$

где  $m_1$  – масса диска,  $R$  – его радиус. Формула (109.14) будет являться проверочной при определении момента инерции диска методом крутильных колебаний.

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Исследуемое тело привести в крутильное колебание. Для этого тело поворачивается относительно оси  $OO'$  на малый угол (*не более  $6^\circ$* ) в горизонтальной плоскости и после этого его предоставить самому себе. Секундомером измерить время 30-50 полных колебаний. Опыт повторить не менее 5 раз с одним и тем же выбранным числом колебаний. Найти среднее значение

$\langle t \rangle$ . Определить период колебаний:  $T = \frac{\langle t \rangle}{n}$ , где  $n$  – число

крутильных колебаний.

2. На одинаковом расстоянии от проволоки на диск поставить добавочные грузы (шары или цилиндры), проделав 5 опытов для того же числа колебаний  $n$ , найти период колебаний

диска с добавочными грузами  $T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n}$ .

3. Линейкой измерить расстояние между осями  $OO'$  и  $O_1O_1'$ .

4. Штангенциркулем измерить диаметр  $2r$  добавочного груза ( $r$  – радиус груза).

5. В зависимости от вида используемых добавочных грузов вычислить момент инерции исследуемого тела по формуле (109.11) или (109.13).

6. Измерить радиус исследуемого диска  $R$  и найти значение момента инерции по проверочной формуле (109.14). Масса диска  $m_1 = 1,570$  кг.

7. Методом расчета погрешностей косвенных измерений найти абсолютную погрешность результата  $\Delta J$ .

8. Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 109.2*

$n$	$t$	$\langle t \rangle$	$T$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$m$	$d$	$r$	$J$	$m_1$	$R$	$J_{np}$	$\Delta J$
	с	с	с	с	с	с	кг	м	м	кг·м <sup>2</sup>	кг	м	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Что называется моментом инерции материальной точки? Каков физический смысл данного понятия?
3. Опишите рабочую установку и ход эксперимента. Каково назначение в работе добавочных грузов?
4. Запишите формулу для периода колебаний крутильного маятника. При каких условиях справедлива эта формула?

### Вопросы для защиты работы

1. Выведите формулу периода колебаний крутильного маятника.
2. Сформулируйте теорему Штейнера и покажите, как она применяется в проделанной работе.
3. Пользуясь дифференциальным методом, получите формулу относительной погрешности  $\Delta J/J$ .
4. Как повысить точность эксперимента, проведенного на данной установке?
5. Выведите формулу момента инерции сплошного диска, кольца, стержня.
6. Сформулируйте закон сохранения момента импульса, основной закон динамики вращательного движения.

### Лабораторная работа № 110

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ**

*Цель работы:* экспериментальное определение периода крутильных колебаний и момента инерции крутильного маятника.

*Приборы и принадлежности:*

крутильный маятник с миллисекундомером FPM-05, микрометр.

#### **Общие теоретические сведения**

Существуют различные экспериментальные методы определения момента инерции любого твердого тела. Один из них –

это метод колебаний крутильного маятника (см. работу № 109, общие теоретические сведения).

### Описание рабочей установки и метода измерений

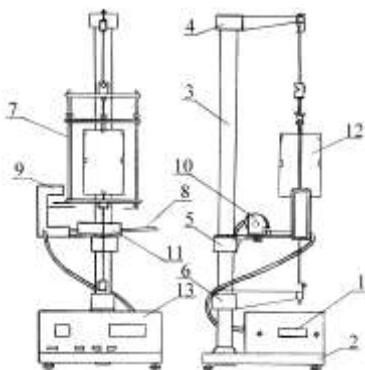


Рис. 110.1

Крутильный маятник

Для определения периода крутильных колебаний и момента инерции используется крутильный маятник FPM-05, представленный на рисунке 110.1. На основании 2, оснащённом 4 ножками для регулировки высоты, прикреплен миллисекундомер 13 (FPM-14). В основании закреплена колонка 3, на которой при помощи прижимных винтов закреплены кронштейны 4, 5, 6. Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На кронштейне 5 закреплена стальная плита 8, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику 9, электромагниту 10 и шкале 11. Положение электромагнита 10 на плите меняется и относительно фотоэлектрического датчика указывается стрелкой, прикрепленной к электромагниту на угловой шкале.

Конструкция рамки позволяет закреплять грузик 12, имеющего форму куба. Грузик крепится при помощи подвижной балки, которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Балка устанавливается путем затягивания гаек.

Фотоэлектрический датчик и электромагнит соединены с миллисекундомером 13.

Момент инерции крутильного маятника определяется на основании формулы (см. формулу (109.8)):

Момент инерции крутильного маятника определяется на основании формулы (см. формулу (109.8)):

$$J = \frac{T^2 D}{4\pi^2}, \quad (110.1)$$

где  $D$  – модуль кручения проволоки,  $T$  – период колебания маятника.

Вывод соотношения (110.1) и формулы, связывающей модуль кручения  $D$  с модулем сдвига  $G$  проволоки, смотрите в методических указаниях к лабораторной работе № 104:

$$D = \frac{\pi G}{2L} r^4. \quad (110.2)$$

С учетом (110.2) формулу (110.1) можно записать в виде:

$$J = \frac{T^2 r^4}{8\pi L} G. \quad (110.3)$$

Выражение (110.3) является расчетной формулой при определении момента инерции крутильного маятника.

Период  $T$  крутильных колебаний маятника определяется на основании показаний универсального миллисекундомера ФРМ – 14 по формуле

$$T = \frac{\langle t \rangle}{n}, \quad (110.4)$$

где  $\langle t \rangle$  – среднее значение времени  $n$  колебаний.

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

**1.** Определить период колебаний крутильного маятника. Для этого:

- а) нажать тумблер «СЕТЬ».
- б) поворачивая рамку прибора с закрепленным в ней грузом, приблизить ее стрелку к электромагниту таким образом, чтобы электромагнит фиксировал положение рамки;
- в) нажать кнопку «ПУСК», при этом электромагнит обесточивается, и рамка начинает совершать колебания;
- г) после того, как рамка совершит не менее 9 крутильных колебаний, нажать кнопку «СТОП»; остановка счета времени произойдет после того, как рамка прибора еще раз пересечет луч фотодатчика; миллисекундомер зафиксирует время 10-ти полных колебаний («периодов»);
- д) записать в таблицу результатов 110.1 показания миллисекундомера;

е) повторить измерения 5 раз с одним и тем же числом колебаний;

ж) по результатам пяти измерений определить среднее арифметическое значение времени  $\langle t \rangle$ ;

з) по формуле (110.4) вычислить период колебаний маятника.

2. Микрометром измерить диаметр проволоки и рассчитать ее радиус.

3. По формуле (110.3) вычислить момент инерции крутильного маятника ( $G = 8,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ).

4. Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 110.1*

$n$	$t$	$T$	$G$	$r$	$L$	$J$	$\Delta J$	$E$	$\Delta T$
	с	с	Н/м <sup>2</sup>	м	м	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	%	с

### Вопросы для допуска к работе

1. Что называется моментом инерции материальной точки? Моментом инерции тела?
2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
3. Запишите рабочую формулу момента инерции.
4. Оцените погрешность метода измерений периода колебаний и момента инерции крутильного маятника.

### Вопросы для защиты работы

1. Выведите формулу периода крутильных колебаний и формулу для определения момента инерции крутильного маятника.
2. Выведите формулу модуля кручения  $D$  и модуля сдвига  $G$  твердого тела (см. лаб. раб. № 104).
3. Каков физический смысл модуля сдвига и модуля кручения?
4. Дайте определение момента инерции материальной точки.
5. Сформулируйте теорему Штейнера.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

*Цель работы:* экспериментальное определение ускорения силы тяжести методом колебаний математического маятника.

*Приборы и принадлежности:*  
математический маятник,  
секундомер,  
зеркальная шкала.

## Основные теоретические сведения

*Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой и длинной нити. На практике математическим маятником можно считать тяжелое тело, подвешенное на нити, длина которой во много раз больше размеров тела. *Длиной  $l$  математического маятника* называется расстояние от центра масс тела до точки подвеса нити. Если отклонить маятник из положения равновесия так, чтобы нить составляла небольшой угол  $\varphi$  с вертикалью (рис. 111.1), и затем отпустить его, то он начнет колебаться в вертикальной плоскости под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы натяжения нити  $\vec{T}$ . Сила  $\vec{F}$ , возвращающая математический маятник в положение равновесия, является равнодействующей сил тяжести  $m\vec{g}$  и натяжения нити. Ее можно найти из рисунка 111.1:

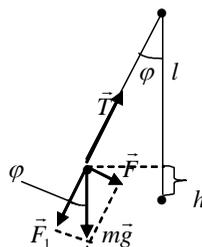


Рис. 111.1

$$F = mg \sin \varphi.$$

*Период и частоту* колебания математического маятника можно найти из закона сохранения механической энергии.

В отсутствии сил сопротивления полная механическая энергия маятника в любой момент времени остается постоянной, т.е. сумма кинетической энергии  $\frac{J\omega^2}{2}$  и потенциальной энергии маятника  $mgh$ :

$$\frac{J\omega^2}{2} + mgh = \text{const}, \quad (111.1)$$

где  $h$  – высота подъема материальной точки от положения равновесия.

Из рис.111.1 найдем  $h$ . Она равна

$$h = l - l \cos \varphi \quad (111.2)$$

Момент инерции  $J$  материальной точки определяется формулой:

$$J = ml^2. \quad (111.3)$$

Учитывая, что угловая скорость равна  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ , а угло-

вое ускорение равно  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$ , а так же (111.2) и (111.3), то выражение (111.1) можно записать в виде:

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const}.$$

Взяв первую производную по времени, получим:

$$\frac{2ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}}{2} + mgl \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (111.4)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (111.5)$$

При малых углах  $\varphi < 6^\circ$  выполняется условие, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда уравнение (111.4) можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (111.6)$$

Выражение (111.6) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка, описывающим гармонические колебания маятника. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (111.7)$$

где  $A$ ,  $\alpha_0$  – амплитуда и начальная фаза колебаний. Величина  $\omega$  в формуле (111.5) является циклической частотой колебания математического маятника.

Период колебаний маятника определяется формулой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (111.8)$$

который зависит от длины  $l$  маятника и ускорения свободного падения  $g$  тел.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Периоды колебаний двух математических маятников с различными длинами  $l_1$  и  $l_2$  согласно формуле (111.8) равны:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Из этих двух равенств получим:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{g}$$

Откуда следует:

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (111.9)$$

Формула (111.9) является исходной для определения величины ускорения свободного падения.

В данной работе математическим маятником служит груз 1, подвешенный бифилярно на длинной легкой нити 2, таким образом, длину которой можно менять (рис. 111.2). Бифилярная подвеска (на двойной нити) позволяет осуществлять колебания в одной плоскости. Величина изменения длины математического маятника  $l_1 - l_2$ , входящая в формулу (111.9), измеряется с помощью зеркальной шкалы 3.

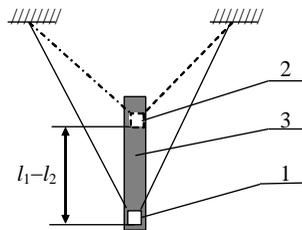


Рис. 111.2

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Длину маятника подбирают так, чтобы груз 1 находился в нижней части шкалы 3. Отсчитывают положение нижней грани груза по шкале, располагая глаз так, чтобы эта грань и ее изображение в зеркале шкалы совпадали.
2. По секундомеру определяют время  $t_1$  50-70 полных колебаний. Опыт повторяют не менее 5 раз и находят среднее значение  $\langle t_1 \rangle$ . Определяют период колебаний:

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n},$$

где  $n$  – число колебаний маятника.

3. Укорачивая нить, перемещают груз в верхнюю часть шкалы и отсчитывают положение нижней грани груза  $l_2$  (на рис. положение 2). Разность отсчетов  $l_1 - l_2$  равна изменению длины маятника.
4. Измеряют не менее 5 раз время  $t_2$  того же числа колебаний  $n$ . Вычисляют период колебаний:

$$T_2 = \frac{\langle t_2 \rangle}{n}.$$

5. По формуле (111.9) вычисляют значение  $\langle g \rangle$ .
6. Методом расчета погрешностей косвенных измерений находят относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta g$  погрешности результата измерений величины ускорения свободного падения.
7. Данные результатов измерений и вычислений заносят в таблицу.

*Форма таблицы результатов 111.1*

$n$	$l_1$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$l_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$g$	$\Delta g$	$E$
	м	с	с	с	м	с	с	с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	%

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Что называется математическим маятником?

3. Запишите формулу периода колебаний математического маятника и поясните величины, входящие в нее. При каких условиях справедлива эта формула?
4. Опишите рабочую установку и ход работы.
5. Оцените погрешность метода измерения ускорения свободного падения.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Под действием каких сил совершает гармонические колебания математический маятник?
2. Исходя из закона сохранения механической энергии, получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний математического маятника, приведите его решение.
3. При каких условиях маятник будет совершать гармонические колебания?
4. Выведите формулу периода колебаний математического маятника.
5. Получите рабочую формулу для определения величины ускорения свободного падения.
6. Получите дифференциальным методом формулу для расчета относительной погрешности  $\Delta g/g$  и укажите пути повышения точности результата эксперимента.

### Лабораторная работа № 112

### **ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК**

*Цель работы:* экспериментальное определение ускорения силы тяжести методом колебаний физического маятника.

*Приборы и принадлежности:*  
универсальный маятник ФП-1,  
секундомер,  
линейка.

### **Общие теоретические сведения**

В теории колебаний физическим маятником называется твердое тело, укрепленное на неподвижной горизонтальной оси,

не проходящей через его центр масс и способное совершать колебания относительно этой оси.

На рис.112.1 изображено твердое тело произвольной формы, ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа и проходит через точку  $O$ . Можно показать, что маятник, отклоненный на малый угол  $\alpha$  от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания.

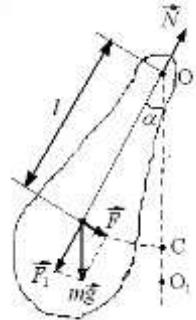


Рис. 112.1

Обозначим через  $J$  момент инерции маятника относительно оси  $O$ . Пусть точка  $C$  является центром масс. Расстояние от оси вращения до центра масс ( $C$ ) тела называется длиной физического маятника ( $OC = l$ ). Силу тяжести  $m\vec{g}$  можно разложить на две составляющие, одна из которых  $\vec{F}_1$  уравновешивается реакцией оси  $\vec{N}$ . Маятник приходит в движение под действием другой составляющей  $\vec{F}$  силы тяжести, величина, которой:

$$F = mg \sin \alpha. \quad (112.1)$$

В случае малых колебаний ( $\alpha \leq 5 \div 6^\circ$ ) можно положить  $\sin \alpha \approx \alpha$  и выражение (112.1) запишем:

$$F \approx -mg\alpha. \quad (112.2)$$

Знак минус означает, что сила  $\vec{F}$  направлена в сторону, противоположную отклонению маятника от положения равновесия.

Основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника запишется:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}. \quad (112.3)$$

Итак, при отклонении маятника от положения равновесия на небольшой угол  $\alpha$  возникает вращающий момент  $\vec{M}$ , стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Модуль момента силы относительно оси  $O$  с учетом (112.2):

$$M = Fl = -mgl\alpha, \quad (112.4)$$

где  $l$  – расстояние от центра масс  $C$  до точки  $O$ , через которую проходит ось вращения.

Угловое ускорение маятника:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (112.5)$$

Поставив (112.4) и (112.5) в уравнение (112.3), получим:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\alpha,$$

откуда

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\alpha.$$

Обозначив

$$\frac{mgl}{J} = \omega^2,$$

получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (112.6)$$

По структуре уравнение (112.6) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Период колебаний физического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (112.7)$$

Отсюда момент инерции физического маятника:

$$J = \frac{mglT^2}{4\pi^2}. \quad (112.8)$$

Величина

$$l_0 = \frac{J}{ml}$$

называется приведенной длиной физического маятника, равной длине математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и физический, т.е.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Точка  $O_1$ , лежащая на прямой, проведенной через точку подвеса  $O$  и центр масс  $C$ , на расстоянии приведенной длины  $l_0 = OO_1$  от оси вращения, называется центром качания маятника (рис. 112.1). Центр качания лежит всегда ниже центра масс. Точка подвеса  $O$  и центр качания  $O_1$  сопряжены друг с другом, т.е. перенос точки подвеса в центр качания не меняет периода колебания маятника. Точка подвеса и центр качания обратимы, а расстояние между этими точками представляет собой приведенную длину  $l_0$  одного из типов физического маятника, так называемого оборотного маятника.

Обозначим через  $J_0$  момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс. На основании теоремы Штейнера момент инерции  $J$  относительно любой оси, параллельной первой, определяем по формуле

$$J = J_0 + ml^2,$$

где  $m$  – масса маятника,  $l$  – расстояние между параллельными осями.

Тогда при подвешивании маятника за точку подвеса  $O$  период колебаний:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \quad (112.9)$$

а при подвешивании за центр качания  $O_1$ , когда маятник находится в перевернутом положении, период:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml_2^2}{mgl_2}}, \quad (112.10)$$

где  $l_2$  и  $l_1$  – расстояния между центром масс и соответствующими осями колебаний.

Из уравнений (112.9) и (112.10):

$$T_1^2 l_1 g - T_2^2 l_2 g = 4\pi^2 (l_1^2 - l_2^2),$$

откуда:

$$g = \frac{4\pi^2 (l_2 - l_1)(l_2 + l_1)}{T_2^2 l_2 - T_1^2 l_1}. \quad (112.11)$$

Формула (112.11) остается справедливой при колебаниях маятника относительно двух произвольных осей  $O$  и  $O_1$ , не обязательно сопряженных, но расположенных по разные стороны от центра масс маятника.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Для определения ускорения свободного падения применяется прибор ФП-1 (рис. 112.2), состоящий из настенного кронштейна 1, на котором смонтированы подушки 2 опорных призм и физического маятника представляющего собой однородный металлический стержень 10, на котором крепятся чечевицы 5 и 8. Чечевица 8 закреплена жестко и является неподвижной. Чечевица 5, находящаяся на конце стержня, может перемещаться по шкале 3 с нониусом 4 и фиксируется в нужном положении винтом 6.

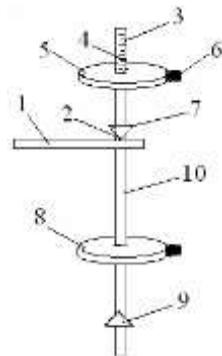


Рис. 112.2

Маятник можно подвешивать на опорные призмы 7 и 9. В комплект прибора входит специальная подставка для определения положения центра масс маятника. Перемещением чечевицы 5 можно добиться равенства периодов колебаний маятника при подвесе его на опорные призмы 7 и 9, и тогда оси колебаний становятся сопряженными, расстояние между опорными призмами становится равным приведенной длине физического маятника.

Величина ускорения свободного падения определяется на основе формулы (112.11). Эксперимент сводится к измерению величин  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ . Формула (112.8) является исходной для определения момента инерции физического маятника.

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

### 1. Определение ускорения свободного падения.

1) Подвесить маятник на опорную призму 7, отклоняют на небольшой угол и измеряют секундомером время  $t_1$  30-50 полных колебаний. Опыт повторяют не менее 5 раз и находят среднее значение времени  $\langle t_1 \rangle$  выбранного числа колебаний.

2) Определяют период колебаний:

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n},$$

где  $n$  – число колебаний.

3) Для нахождения положения центра масс маятника снять его с подушек опорных призм и балансировать на горизонтальном ребре призмы, укрепленном на столе до тех пор, пока моменты сил тяжести, действующие на правую и левую часть маятника, окажутся равными. В случае равновесия центр масс маятника будет расположен в стержне против точки опоры. Не снимая маятник с ребра призмы, линейкой измеряют расстояние  $l_1$  между опорой 7 и центром масс.

4) Перевернув маятник, подвешивают его на опорную призму 9. Выбрать то же число колебаний  $n$  и, повторив опыт не менее 5 раз, находят период колебаний:

$$T_2 = \frac{\langle t_2 \rangle}{n}.$$

При этом измеренные значения периодов  $T_1$  и  $T_2$  должны отличаться не более чем на 5%.

5) Найти расстояние  $l_2$  между ребром опорной призмы 9 и центром масс:  $l_2 = l_0 - l_1$ , где  $l_0$  – расстояние между ребрами опорных призм 7 и 9 (для данного маятника  $l_0 = 0,73$  м).

6) Вычисляют среднее значение  $\langle g \rangle$  по формуле (112.11).

7) Оценивают абсолютную погрешность  $\Delta g$  результата, исходя из табличного значения искомой величины  $g_{\text{табл}}$  для широты г. Братска:  $g_{\text{табл}} = 9,816$  м/с<sup>2</sup>. Найти относительную погрешность  $E$ .

8) Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 112.1.

*Форма таблицы результатов 112.1*

№	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$l_1$	$l_2$	$g$	$\Delta g$	$E$
		с	с	с	с	с	с	м	м	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	%

**2. Определение момента инерции физического маятника.**

1) Найти среднее значение момента инерции физического маятника  $J$  относительно оси колебаний по формуле (112.8). Для колебаний маятника, подвешенного на опору 9,  $T = T_2$  и  $l = l_2$ . Масса маятника  $m = 10,65$  кг.

2) Методом расчета погрешностей косвенных измерений найти относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta J$  погрешности результатов измерений.

3) Данные результатов измерений и вычислений занесите в таблицу 2.

*Форма таблицы результатов 112.2*

№	$m$	$l$	$T$	$J$	$\Delta J$	$E$
	кг	м	с	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	%

**Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Что называется физическим маятником? Какой маятник называется оборотным?
3. Запишите формулу периода колебаний физического маятника и поясните физический смысл величин, входящих в нее. При каких условиях справедлива эта формула?
4. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
5. Оцените погрешность метода измерения момента инерции физического маятника.

**Вопросы для защиты работы**

1. Выведите формулу для периода колебаний физического маятника.

2. Получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника, приведите его решение.
3. Что называется приведенной длиной физического маятника?
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Выведите рабочую формулу:
  - а) для определения ускорения свободного падения;
  - б) для определения момента инерции физического маятника.
6. Получите дифференциальным методом формулу для расчета относительной погрешности  $E = \Delta J/J$  и укажите пути повышения точности результатов эксперимента.

### Лабораторная работа № 113

## УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

*Цель работы:* экспериментальное определение ускорения свободного падения методом колебаний математического и обратного маятников.

*Приборы и принадлежности:*  
установка FPM-04.

### Общие теоретические сведения

Физическим маятником называется твердое тело, укрепленное на неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс и способное совершать колебания относительно этой оси.

На рис. 113.1 изображено твердое тело произвольной формы, ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа и проходит через точку  $O$ . Можно показать, что маятник, отклоненный на малый угол  $\alpha$  от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания.

Обозначим через  $J$  момент инерции маятника относительно оси  $O$ . Пусть точка  $C$  является центром масс. Расстояние от оси вращения до центра масс ( $C$ ) тела называется длиной физического маятника ( $OC = l$ ). Силу тяжести  $m\vec{g}$  можно разложить на две составляющие,

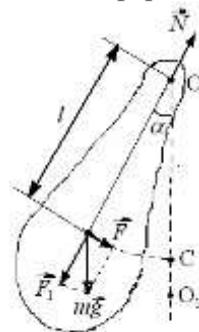


Рис. 113.1

одна из которых  $\vec{F}_1$  уравнивается реакцией оси  $\vec{N}$ . Маятник приходит в движение под действием другой составляющей  $\vec{F}$  силы тяжести, величина, которой:

$$F = mg \sin \alpha. \quad (113.1)$$

В случае малых колебаний ( $\alpha < 6^\circ$ ) можно положить  $\sin \alpha \approx \alpha$  и выражение (113.1) запишем:

$$F = -mg\alpha. \quad (113.2)$$

Знак минус означает, что сила  $\vec{F}$  направлена в сторону, противоположную отклонению маятника от положения равновесия.

Основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника запишется:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}. \quad (113.3)$$

То есть, при отклонении маятника от положения равновесия на небольшой угол  $\alpha$  возникает вращающий момент  $\vec{M}$ , стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Модуль момента силы относительно оси  $O$  с учетом (113.2):

$$M = Fl = -mgl\alpha, \quad (113.4)$$

где  $l$  – расстояние от центра масс  $C$  до точки  $O$ , через которую проходит ось вращения.

Угловое ускорение маятника:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (113.5)$$

Поставив (113.4) и (113.5) в уравнение (113.3), получим:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\alpha,$$

откуда

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\alpha.$$

Обозначив

$$\frac{mgl}{J} = \omega^2,$$

получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (113.6)$$

По структуре уравнение (113.6) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Период колебаний физического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (113.7)$$

где величину

$$L = \frac{J}{ml}$$

называют приведенной длиной физического маятника (см. работу № 112).

Если заменить физический маятник математическим (на практике математическим маятником можно считать всякое тяжелое тело, подвешенное на легкой нерастяжимой нити, длина которой во много раз больше размеров самого тела) массой  $m$  и длиной  $l$ , учитывая, что момент инерции математического маятника  $J = ml^2$ , то выражение (113.7) будет иметь вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (113.8)$$

Таким образом, сравнив формулы (113.7) и (113.8) для определения периодов колебаний физического и математического маятников, можно сказать, что *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного

физического маятника. Такой физический маятник называется обратным. (см. работу № 112).

### Описание рабочей установки и метода измерений

Общий вид универсального маятника FPM-04 представлен на рис. 113.2. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка 3, на которой зафиксирован кронштейн 5 с фотоэлектрическим датчиком 6.

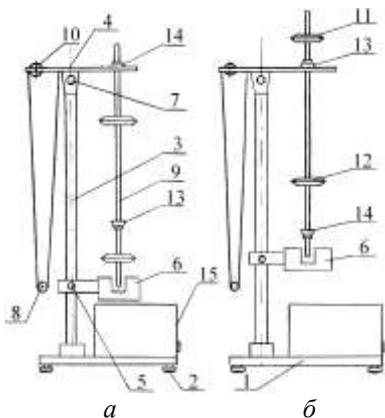


Рис. 113.2.

Универсальный маятник

штейн 5 с фотоэлектрическим датчиком 6.

После отвинчивания воротка 7 верхний кронштейн можно поворачивать вокруг колонки. Воротком 7 фиксируется кронштейн в любом произвольно выбранном положении. С одной стороны кронштейна 4 находится математический маятник 8, с другой на смонтированных вкладышах обратный маятник 9.

Длину математического маятника можно регулировать при помощи воротка 10, а ее величину можно определять с помощью шкалы на колонке 3.

Обратный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором закреплены два ролика 11, 12 и опорные призмы 13, 14, повернутые друг к другу лезвиями.

На стальном стержне через 10 мм выполнены кольцевые углубления, служащие для точного определения длины обратного маятника  $L$  (расстояние между ножами).

Нижний кронштейн 6 вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно выбранном положении.

Фотоэлектрический датчик соединен с закрепленным к основанию универсальным миллисекундомером FPM-14.

На лицевой панели универсального миллисекундомера 15 находятся следующие кнопки:

СЕТЬ – выключатель сети;

СБРОС – установка нуля измерителя;

СТОП – окончание измерения.

С помощью универсального маятника определяется ускорение свободного падения по формулам, полученным из выражений (113.7) и (113.8):

$$g_1 = \frac{4\pi^2 l}{T_1^2}, \quad (113.9)$$

где  $g_1$  – ускорение свободного падения, вычисленное через период колебаний математического маятника ( $T_1$ );

$$g_2 = \frac{4\pi^2 L}{T_2^2}, \quad (113.10)$$

где  $g_2$  – ускорение свободного падения, вычисленное через период колебаний обратного маятника ( $T_2$ ).

Значения  $T_1$  и  $T_2$  находятся экспериментально:

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{\langle t_2 \rangle}{n},$$

где  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$  – средние арифметические значения времени  $n$  полных колебаний математического и обратного маятников.

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

#### *Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника*

1. Нижний кронштейн 6 вместе с фотоэлектрическим датчиком установите в нижней части колонки так, чтобы длина математического маятника по шкале была не менее 50 см. Затяните вороток 5, фиксируя фотоэлектрический датчик в избранном положении.

2. Поворачивая нижний кронштейн, поместите над датчиком математический маятник.

3. Вращая вороток 10, на верхнем кронштейне установите длину математического маятника, обратив внимание на то, чтобы черта на шарике была продолжением черты на корпусе фотоэлектрического датчика.

4. Отклоните математический маятник на угол  $4 - 5^0$  от положения равновесия.

5. Нажмите клавишу СБРОС.

6. При подсчете измерителем 30-50 колебаний нажмите клавишу СТОП (при 30 колебаниях нажать при цифре 29, при 50 колебаниях – при цифре 49!). Измерения повторите не менее 5 раз для одного и того же числа колебаний.

7. Определите среднее арифметическое значение времени по формуле:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

где  $n$  – количество выполненных измерений;  $t_i$  – значение времени, полученное в  $i$  – ом измерении.

8. Определите период  $T_1$  математического маятника.

9. По формуле (113.9) определите ускорение свободного падения  $g_1$ .

*Определение ускорения свободного падения  
с помощью оборотного маятника*

1. Поверните верхний кронштейн на  $180^0$ .

2. Установите оборотный маятник на ножке 14 как указано на рисунке 113.2,а.

3. Отклоните маятник на угол  $4 - 5^0$  от положения равновесия.

4. Нажмите клавишу СБРОС.

5. После подсчета измерителем 30-50 колебаний нажмите клавишу СТОП. Измеряют не менее 5 раз время 30-50 колебаний маятника.

6. Определите период колебаний оборотного маятника  $T_2$ .

7. Снимите маятник и, перевернув его, подвесьте на втором ноже 13 (см. рис. 113.2,б).

8. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком 6 переместите так, чтобы конец стержня маятника перекрывал световой луч, поступающий от лампочки на фотодатчик.

9. Повторите опыт согласно пунктам 3-5. Определив период колебаний  $T_2'$ , сравните результат с полученной выше величиной  $T_2$ . Для оборотного маятника расхождения в значениях  $T_2$  и  $T_2'$  не должны превышать 1%.

10. Определите приведенную длину оборотного маятника  $L$ , подсчитывая количество насечек на стержне между ножами, которые нанесены через каждые 10 мм.

11. По формуле (113.10) определите ускорение свободного падения  $g_2$ .

12. Оцените относительную ( $E$ ) и абсолютную ( $\Delta g$ ) погрешности результатов измерений по формулам, полученным дифференциальным методом:

$$E_1 = \frac{\Delta g_1}{g_1} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T_1}{T_1}, \quad \Delta g_1 = E_1 g_1;$$

$$E_2 = \frac{\Delta g_2}{g_2} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T_2}{T_2}, \quad \Delta g_2 = E_2 g_2.$$

Результаты измерений и вычислений заносят в таблицы.

*Форма таблицы результатов 113.1*

№	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$l$	$g_1$	$E_1$	$\Delta g_1$
		$c$	$c$	$c$	$m$	$m/c^2$	%	$m/c^2$

*Форма таблицы результатов 113.2*

№	$n$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$t_2'$	$\langle t_2' \rangle$	$T_2'$	$L$	$g_2$	$E_2$	$\Delta g_2$
		$c$	$c$	$c$	$c$	$c$	$c$	$m$	$m/c^2$	%	$m/c^2$

### Вопросы для допуска к работе

1. Цель работы.
2. Что называется физическим и математическими маятниками? Какой маятник является оборотным?
3. Запишите формулу периода колебаний физического маятника и поясните физический смысл входящих в нее величин.
4. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.

## Вопросы для защиты работы

1. Выведите формулу для периода колебаний физического и математического маятников.
2. Выведите дифференциальные уравнения гармонических колебаний физического и математического маятников, приведите их решения.
3. Что называется приведенной длиной физического маятника?
4. Выведите рабочую формулу для определения ускорения свободного падения.
5. Оцените погрешность методов измерения ускорения свободного падения с помощью математического и оборотного маятников.

Лабораторная работа № 114

## НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК

*Цель работы:* экспериментальное изучение сил трения, возникающих при качении шара по плоской поверхности; определение коэффициента трения качения с помощью наклонного маятника.

*Приборы и принадлежности:*  
установка FPM-07 – наклонный маятник.

## Общие теоретические сведения

На любое движущееся тело действует сила трения. Природа этих сил может быть различной, но в результате их действий всегда происходит превращение части механической энергии во внутреннюю энергию взаимодействующих тел. В зависимости от характера относительного движения соприкасающихся тел различают два вида трения: трение скольжения и трение качения.

В данной работе изучается трение качения. Причина возникновения трения качения состоит в следующем. При качении по плоской поверхности цилиндра или шара возникают неупругие деформации. Для простоты рассмотрения будем полагать, что шар не деформируется, а деформируется плоская поверхность качения (рис. 114.1, 114.2). Природа трения качения свя-

90

зана с совершением работы на деформирование материала (формированием «валика» перед катящимся телом – рис. 114.1, который возникает из-за сжатия материала основания под нагрузкой перед катящимся телом).

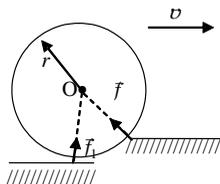


Рис. 114.1

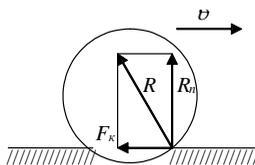


Рис. 114.2

Вычисление силы трения качения очень сложно, и до сих пор не существует удовлетворительной теории потому, что недостаточно изучены законы, связывающие силы и изменяющиеся со временем сложные неупругие деформации.

В первом приближении для силы трения качения справедлив закон Кулона

$$F_k = k \frac{N}{r}, \quad (114.1)$$

где:  $k$  – коэффициент трения качения;  $r$  – радиус шара (цилиндра),  $N$  – сила нормального давления.

Формулу (114.1) можно представить в другом виде

$$M = kN, \quad (114.2)$$

где  $M = F_k r$  представляет собой момент силы трения качения относительно оси шара (цилиндра). Из (114.2) следует, что коэффициент трения качения имеет размерность длины.

Трение качения во много раз меньше трения скольжения. При трении качения меньше изнашиваются трущиеся поверхности и значительно меньше диссипация энергии. Поэтому на практике, где это возможно, трение скольжения заменяют трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т.п.).

### Описание рабочей установки и метода измерений

Коэффициент трения качения в данной работе определяется с помощью прибора FPM-07, схема которого представлена на

рис. 114.3. В основание прибора вмонтированы миллисекундомер 1 и счетчик периодов (колебаний) 2. К кронштейну 3 прикреплена шкала 4 (для измерения угла  $\alpha$ ) и шкала 5 (для установки угла  $\beta$ ). Сменные шары 6 подвешиваются на нити с помощью специального держателя. В пазы кронштейна 3 вставляются отрезки полос испытуемых образцов 7.

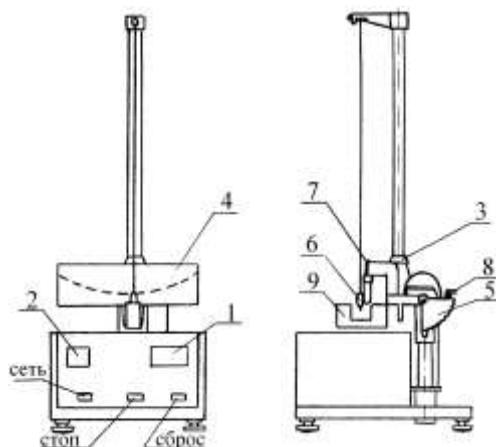


Рис. 114.3. Наклонный маятник

Для наклона маятника (изменение угла  $\beta$ ) используется маховик 8. Фотоэлектрический датчик 9 также вмонтирован в кронштейн 3. Шары заменяются путем отвинчивания от держателя.

Шкала 4 прибора лежит в плоскости колебаний маятника, амплитуда которых определяется по делениям этой шкалы (угол  $\alpha$ ). Поворачивая маховик 8, можно изменять наклон плоскости колебаний шара (угол  $\beta$ ). Эти углы изображены на рис. 114.4. Причем,  $\alpha_0$  – начальный угол отклонения маятника, а угол  $\alpha_n$  – максимальный угол отклонения после совершения маятником  $n$  полных колебаний. Аналогично обозначены максимальные высоты подъема шарика ( $h_0, h_n, Z_0$ ), а через  $S_n$  – путь, проходимый шариком за четверть  $n$ -го колебания.

Принцип действия прибора основан на измерении изменения амплитуды (угла отклонения) затухающих колебаний наклонного маятника: чем больше разница между  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  при заданном числе колебаний  $n$ , тем больше сила трения качения

(при постоянных  $r$  и  $\beta$ ) между шаром и испытуемым образцом. Таким образом, разница  $(\alpha_0 - \alpha_n)$  определяет величину коэффициента трения качения.

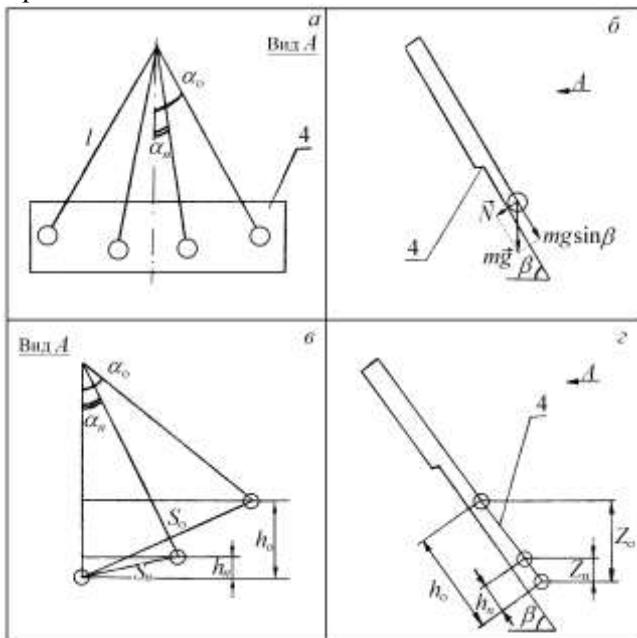


Рис. 114.4

С другой стороны, разница  $(\alpha_0 - \alpha_n)$  определяет изменение максимальной высоты подъема шара, т.е. изменение максимального значения его потенциальной энергии ( $\Delta W$ ) за счет работы силы трения качения. Поэтому формулу для определения коэффициента трения качения в данной работе можно получить, воспользовавшись законом сохранения механической энергии

$$-\Delta W = A_{mp}, \quad (114.3)$$

где  $A_{mp}$  – работа силы трения качения, которая, в свою очередь, определяется по формуле

$$A_{mp} = M\Delta\varphi, \quad (114.4)$$

где  $M$  – определяется по формуле (114.2);  $\Delta\varphi$  – полный угол поворота шара при совершении заданного числа колебаний ( $n$ ) наклонного маятника.

С учетом (114.2) и рис. 114.4,б уравнение (114.4) можно записать в следующем виде

$$A_{mp} = k\Delta\varphi N = kmg \cos \beta \Delta\varphi. \quad (114.5)$$

Величину угла  $\Delta\varphi$  (в радианах) определяют следующим образом

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{2\pi r} \cdot 2\pi, \quad (114.6)$$

где  $\Delta S$  – путь, пройденный шаром за  $n$  колебаний;  $\Delta S/2\pi r$  – число полных оборотов шара на этом пути.

Согласно рис. 114.4,в, средний путь  $\langle S \rangle$ , проходимый шаром за одно колебание

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} (4S_0 + 4S_n),$$

тогда за  $n$  колебаний будет пройден путь

$$\Delta S = \langle S \rangle n = \frac{1}{2} (4S_0 + 4S_n) n. \quad (114.7)$$

С помощью этого рисунка, считая углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  малыми, из соответствующих равнобедренных треугольников легко получить выражения для  $S_n$  и  $S_0$ :

$$S_n = 2l \sin \frac{\alpha_n}{2} \approx l\alpha_n, \quad S_0 \approx l\alpha_0, \quad (114.8)$$

где  $l$  – длина нити подвеса. Подставляя выражения (114.8) в (114.7), найдем  $\Delta S = 2nl(\alpha_n + \alpha_0)$  и, учитывая (114.6), получим

$$\Delta\varphi \approx \frac{2nl(\alpha_n + \alpha_0)}{r}.$$

Окончательную формулу для работы силы трения качения получим из (114.5)

$$A_{mp} \approx kmg \cos \beta \cdot \frac{2nl(\alpha_n + \alpha_0)}{r}. \quad (114.9)$$

Выражение (114.9) является правой частью уравнения (114.3). Левую часть (114.3) можно вычислить с помощью рис. 114.4,в и г:

$$-\Delta W = W_n - W_0 = mgZ_n - mgZ_0 = mg(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_n)l \sin \beta,$$

где  $\Delta W$  – изменение потенциальной энергии шарика;  $W_0$  – потенциальная энергия шарика при начальном отклонении;  $W_n$  – потенциальная энергия шарика при последнем отклонении;  $Z_0$  – начальная высота подъема шарика (рис. 114.4,в);  $Z_n$  – высота подъема шарика во время последнего колебания;  $\alpha_0$  – начальный угол отклонения (рис. 114.4,в);  $\alpha_n$  – конечный угол отклонения (рис. 114.4,г);  $l$  – длина нити подвеса;  $\beta$  – угол наклона плоскости колебаний маятника.

Подставляя в (114.3), найдем

$$k \approx r \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha_n}{2n(\alpha_0 + \alpha_n)}. \quad (114.10)$$

Учитывая малые значения углов  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$ , разность косинусов в выражении (114.10) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 - \cos \alpha_n &= -2 \sin \frac{\alpha_n + \alpha_0}{2} \sin \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{2} \approx \\ &\approx -2 \frac{\alpha_n + \alpha_0}{2} \cdot \frac{\alpha_n - \alpha_0}{2} = -\frac{1}{2} (\alpha_n + \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_n) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (114.10), окончательно получим:

$$k = r \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n}. \quad (114.11)$$

С помощью формулы (114.11) определяется коэффициент трения качения в данной лабораторной работе.

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Измерить штангенциркулем диаметр шара и определить его радиус.

2. С помощью маховика 8 установить угол наклона плоскости колебаний маятника  $\beta = 45^\circ$  (рис. 114.3). При таком угле погрешность измерений минимальна.

3. Отклонить подвешенный на нити шар вдоль шкалы 4 вправо на угол  $\alpha_0 = 10^\circ$  и, удерживая его в этом положении, нажать последовательно кнопки СТОП и СБРОС (рис. 114.3) – оба табло должны показать нули.

4. Отпустить шар. После того, как шар совершит  $n$  полных колебаний ( $n = 10$ ), измерить максимальный угол отклонения шара  $\alpha_n$  по шкале 4.

5. Опыт по п.п. 4 и 5 необходимо проделать пять раз и получить значения  $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{n5}$ .

6. Вычислить среднее значение угла  $\langle \alpha_n \rangle$  из пяти значений полученных в п.5, а затем по формуле (114.11) определить среднюю величину коэффициента трения  $\langle k \rangle$ , подставив в (114.11)  $\langle \alpha_n \rangle$  вместо  $\alpha_n$ .

7. Рассчитать абсолютную погрешность  $\Delta \alpha_n$  измерения конечного угла  $\langle \alpha_n \rangle$ .

8. Вычислить относительную погрешность ( $E$ ) измерения  $k$  по следующей формуле:

$$E = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta r}{r} + \frac{2\Delta\beta}{\sin 2\beta} + \frac{\Delta\alpha_0 + \Delta\alpha_n}{\alpha_0 - \langle \alpha_n \rangle}$$

9. По формуле  $\Delta k = \langle k \rangle \cdot E$  рассчитать абсолютную погрешность измерения  $k$  и окончательный результат измерений представить в виде  $k = \langle k \rangle \pm \Delta k$ .

10. Результаты измерений и расчетов по пп. 1–9 занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 114.1*

№	$r$ м	$\beta$ рад	$n$	$\alpha_0$ рад	$\alpha_{n,i}$		$\langle \alpha_n \rangle$ рад	$\langle k \rangle$ м	$\langle \Delta \alpha \rangle$ рад	$E$ %
					град	рад				

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.

3. Запишите рабочую формулу для определения  $k$ , поясните смысл всех величин, входящих в нее.
4. Поясните смысл и метод определения всех величин, вносимых в таблицу.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.
2. Приведите формулу работы механической силы. Как связана работа силы трения качения с изменением максимальной потенциальной энергии шара?
3. Назовите виды трения и их характеристики.
4. Поясните природу силы трения качения.
5. Выведите рабочую формулу расчета коэффициента трения качения.
6. Выведите формулу для расчета относительной погрешности измерения  $E$ . Проанализируйте ее с точки зрения повышения точности эксперимента.

### Лабораторная работа № 115

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ИЗГИБА**

*Цель работы:* экспериментальное определение модуля упругости стали и титана методом изгиба стержня.

*Приборы и принадлежности:*

прибор для определения модуля упругости, стальной и титановый стержни, штангенциркуль, масштабная линейка, измерительный микроскоп (или катетометр), набор грузов.

#### **Общие теоретические сведения**

Из механики известно, что под действием приложенной к телу силы, изменяется его форма и объем, т. е. тело деформиру-

ется. Различают деформации растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба.

Величина деформации растяжения оценивается отношением изменения размера тела  $\Delta l$  к его первоначальному размеру  $l$ . Это отношение называется относительной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

При действии на твердое тело различных по величине сил деформация его будет неодинаковой. Отношение силы, вызывающей деформацию растяжения, к площади поперечного сечения образца называется механическим напряжением:

$$\sigma = \frac{dF}{dS}, \left[ \frac{H}{m^2} \right].$$

Упругие деформации твердых тел подчиняются закону Гука, выражающему пропорциональность между напряжением и величиной относительной деформации, т.е.

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где  $E$  – модуль упругости Юнга.

Величина модуля упругости зависит от материала, из которого изготовлен образец. Модуль Юнга можно определить, пользуясь выражением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Fl}{S\Delta l}. \quad (115.1)$$

Численно модуль Юнга равен величине нагрузки, которую надо приложить к образцу с единичной площадью поперечного сечения, чтобы удвоить его длину

Пользуясь соотношением (115.1), можно определить абсолютную деформацию

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}.$$

### **Описание рабочей установки и метода измерений**

Модуль упругости можно определить методом изгиба стержня, обоими концами положенного на твердые опоры и

нагруженного в середине грузом определенного веса  $\vec{G}$ . Действие этой силы вызывает деформацию изгиба (рис. 115.1). В этом случае деформация характеризуется так называемой стрелой изгиба  $\lambda$ , т.е. расстоянием, на которое опускается точка приложения силы, действующей на стержень.

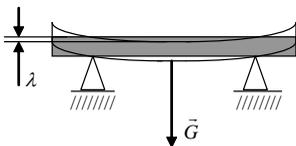


Рис. 115.1

Стрела изгиба связана с модулем упругости соотношением

$$E = \frac{Gl^3}{4\lambda ab^3}. \quad (115.2)$$

где  $G$  – вес груза;  $l$  – расстояние между опорами;  $a$  – ширина поперечного сечения стержня;  $b$  – высота сечения.

Применение формулы (115.2) для определения модуля упругости возможно, если стержень прямоугольного сечения и изгибающая сила действует параллельно той стороне стержня, которая входит в знаменатель в третьей степени.

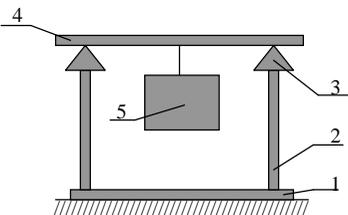


Рис. 115.2

Прибор для определения модуля упругости по изгибу стержня состоит из панели 1, на которой смонтированы две стойки 2 с опорами 3. Исследуемый стержень 4 кладется концами на опоры. Деформация стержня вызывается подвешенным к нему грузом 5 (рис. 115.2).

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Измеряют штангенциркулем высоту  $b$  и ширину  $a$  поперечного сечения стержня в нескольких местах (хотя бы в трех) и определяют средние значения.
2. Линейкой измеряют расстояние  $l$  между опорами. Кладут на опоры стальной стержень.

3. По шкале окуляра измерительного микроскопа отсчитать начальное (нулевое) положение  $h_0'$  середины верхней грани стержня.
4. Нагрузить последовательно стержень грузами массой 0,1 кг; 0,2 кг; 0,3 кг и произвести отсчет положения верхней грани  $h_1'$ ,  $h_2'$ ,  $h_3'$  (первичные отсчеты).
5. Снимая дополнительные грузы, отметить последовательно положения стержня  $h_2''$  и  $h_1''$  (вторичные отсчеты).
6. Освободив стержень от дополнительных грузов, определить снова нулевое положение стержня  $h_0''$ . В случае несовпадения вторичных и первичных отсчетов следует взять среднее значение из обоих отсчетов.
7. Определить для каждого груза стрелу прогиба  $\lambda = h - h_0$ .
8. По формуле (115.2) определить значение модуля упругости для каждого из грузов. Найти среднее значение  $\langle E \rangle$ .
9. Определить относительную ошибку  $\mathcal{E}$  измерений для каждого груза дифференциальным методом, найти среднюю относительную ошибку  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , и исходя из среднего значения модуля упругости  $\langle E \rangle$ , вычислить абсолютную погрешность  $\Delta E$ .
10. Повторить измерения для титанового стержня.

*Форма таблицы результатов 115.1*

№	$G$	$h_0$	$h'$	$h''$	$a$	$b$	$\lambda$	$E$	$\langle E \rangle$	$\Delta E$
	Н	м	м	м	м	м	м	Н/м <sup>2</sup>	Н/м <sup>2</sup>	Н/м <sup>2</sup>

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Поясните метод определения модуля упругости методом изгиба стержня.
3. Опишите ход работы.
4. Оцените погрешность метода измерений модуля упругости.

## Вопросы для защиты работы

1. Какие виды деформаций наблюдаются в твердых телах? Дайте характеристику каждого из них.
2. Какая деформация называется упругой? Неупругой?
3. Сформулируйте закон Гука.
4. Каков физический смысл модуля Юнга?
5. Получите формулу расчета относительной погрешности  $\varepsilon = \Delta E / \langle E \rangle$ , пользуясь дифференциальным методом, и укажите пути повышения точности результатов эксперимента.

## Лабораторная работа № 116

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА УПРУГОСТИ

*Цель работы:* экспериментальное определение коэффициента стальной пружины методом колебаний.

*Приборы и принадлежности:*

пружинный маятник,  
секундомер,  
грузы,  
технические весы.

### Общие теоретические сведения

Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется упругой. Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого тела, предел.

Опыт показывает, что при упругой деформации для тела выполняется закон Гука, который гласит: упругая сила пропорциональна абсолютному удлинению тела, т.е.

$$F_{уп} = -k\Delta l,$$

где  $k$  – коэффициент упругости тела;  $\Delta l$  – абсолютное удлинение.

Рассмотрим пружинный маятник, представляющий собой упругую пружину с коэффициентом упругости  $k$ , на одном конце которой подвешено тело массой  $m$ , а другой конец закреплен (рис. 116.1).

В свободном состоянии маятника на тело массой  $m$  действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и упругая сила  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , которые равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому тело массой  $m$  будет находиться в состоянии покоя (равновесия) (рис. 116.1). Приложим к телу массой  $m$  внешнюю силу  $\vec{F}$ , которая сместит тело из положения равновесия вниз на расстояние  $x$  (рис. 116.2), затем уберем эту силу и предоставим маятник самому себе. Под действием упругой силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$  тело возвращается в положение равновесия, по достижению его тело по инерции будет двигаться вверх, сжимая пружину. При сжатии пружины возникает упругая сила, направленная вниз по оси  $x$ , которая разжимает пружину. При этом тело будет двигаться вниз и, пройдя положение равновесия, по инерции опустится вниз по оси  $x$ . При этом в пружине возникает упругая сила, направленная вверх, которая заставляет подниматься тело вверх. При отсутствии диссипативных сил (в частности, силы сопротивления) и при выполнении закона Гука  $F_{\text{упр}} = -kx$ , тело будет совершать гармонические колебания.

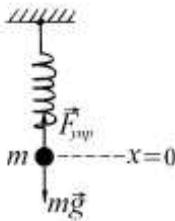


Рис. 116.1

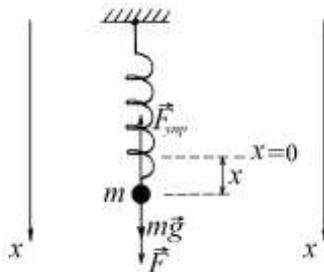


Рис. 116.2

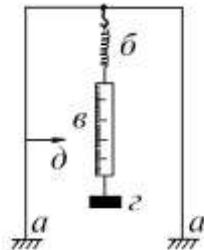


Рис. 116.3

Найдем уравнение колебания пружинного маятника и период колебания. Для этого используем закон сохранения механической энергии. В любой момент времени полная механическая энергия пружинного маятника остается постоянной, если отсут-

ствуют диссипативные силы и система изолирована. Тогда сумма кинетической  $\frac{mv^2}{2}$  и потенциальной  $\frac{kx^2}{2}$  энергии постоянна

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const. \quad (116.1)$$

где  $v$  – скорость тела,  $x$  – смещение тела от положения равновесия, причем

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Продифференцировав (116.1) по времени, получим

$$\frac{2m\dot{x}\ddot{x}}{2} + \frac{2kx\dot{x}}{2} = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (116.2)$$

Обозначив

$$\frac{k}{m} = \omega^2,$$

Получим

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (116.3)$$

Соотношение (116.3) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний пружинного маятника, совершающихся с циклической частотой  $\omega$ . *Циклическая частота равна числу полных колебаний, совершаемых за время  $2\pi$  секунд.*

Решением дифференциального уравнения (116.3) служит уравнение гармонических колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (116.4)$$

где  $x$  – смещение колеблющегося тела от положения равновесия в момент времени  $t$ ;  $A$  – амплитуда колебаний, равная наибольшему смещению тела от положения равновесия;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний.

*Период колебаний, равный времени, за которое совершается одно полное колебание, определяется формулой*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (116.5)$$

Период колебаний пружинного маятника зависит от коэффициента упругости пружины и массы колеблющегося тела.

Из формулы (116.5) коэффициент упругости пружины равен

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \quad (116.6)$$

### **Описание рабочей установки и метода измерений**

Рабочая установка представляет собой пружинный маятник (рис. 116.3), состоящий из груза  $z$ , подвешенного к пружине  $b$ . Пружина крепится к перекладине, закрепленной на двух штативах  $a$ .

Если груз вывести из состояния покоя, то под действием упругой силы пружины он начнет совершать гармонические колебания. Зная массу груза  $m$  и период колебаний  $T$ , по формуле (116.6) легко находится коэффициент упругости пружины  $k$ .

Правильность найденного значения коэффициента упругости  $k$  проверяется по формуле, являющейся выражением закона Гука:

$$k_{\text{пров}} = \frac{P}{\Delta l}, \quad (116.7)$$

где  $P = mg$  – вес груза, под действием которого пружина удлиняется на величину  $\Delta l$ . Значение  $\Delta l$  отсчитывают по смещению миллиметровой линейки  $в$ , укрепленной с пружиной относительно указателя смещения  $d$ .

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений**

1. Подобрать массу груза так, чтобы можно было легко считать число колебаний маятника. Определить массу груза  $m_1$  взвешиванием на технических весах.

- Исходя из 30-50 полных колебаний, определить период колебаний груза

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n},$$

где  $\langle t_1 \rangle$  – среднее время  $n$  полных колебаний. Время  $t_1$  измерить секундомером. С данным грузом время  $t_1$  измерить не менее 5 раз для одного и того же числа колебаний и определить среднее значение времени  $\langle t_1 \rangle$ .

- По формуле (116.6) найти значение коэффициента упругости  $k$ .
- Грузы привести в статическое состояние, и, по смещению линейки относительно указателя, определить удлинение пружины  $\Delta l_1$  под действием веса груза.
- По формуле (116.7) найти среднее значение  $k_{\text{пров}}$ .
- Опыт повторить при другой массе груза  $m_2$ .
- Используя дифференциальный метод расчета погрешностей косвенных измерений, вычислить относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta k$  погрешности измерения коэффициента упругости  $k$  пружины.
- Данные вычислений и измерений занести в таблицы 116.1 и 116.2.

*Форма таблицы результатов 116.1*

№	$m_1$	$n$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$\langle k \rangle$	$\Delta l_1$	$P_1$	$k_{\text{пров}}$	$E_1$
	кг		с	с	с	Н/м	м	Н	Н/м	%

*Форма таблицы результатов 116.2*

№	$m_2$	$n$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$\langle k \rangle$	$\Delta l_2$	$P_2$	$k_{\text{пров}}$	$E_2$
	кг		с	с	с	Н/м	м	Н	Н/м	%

### Вопросы для допуска к работе

- Какова цель работы?

2. Запишите рабочую формулу и поясните величины, входящие в нее.
3. Опишите рабочую установку и ход эксперимента.
4. Оцените погрешность метода измерений коэффициента упругости.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Опишите колебания пружинного маятника.
2. Выведите дифференциальное уравнение гармонического колебания для пружинного маятника.
3. Напишите уравнение гармонического колебания пружинного маятника и поясните физический смысл всех величин.
4. Дайте определение циклической частоты и периода колебания.
5. От чего зависят циклическая частота и период колебания пружинного маятника?
6. Выведите рабочую формулу.
7. Каков физический смысл коэффициента упругости?
8. Какие колебания называются свободными? Вынужденными?
9. Вычислите погрешность результата эксперимента, пользуясь дифференцированным методом.

### Лабораторная работа № 117

#### **ГРАДУИРОВКА ЗВУКОВОГО ГЕНЕРАТОРА**

*Цель работы:* градуировка звукового генератора методом фигур Лиссажу.

*Приборы и принадлежности:*  
электронный осциллограф,  
звуковой генератор.

#### **Общие теоретические сведения**

Приведенное ниже краткое теоретическое введение должно способствовать осмысливанию сути метода фигур Лиссажу. Фигуры Лиссажу представляют собой замкнутые траектории, очерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направле-

ниях. Впервые изучены французским ученым Ж. Лиссажу. Вид фигуры Лиссажу зависит от соотношения между частотами, фазами и амплитудами накладываемых колебаний.

Рассмотрим вначале случай, когда материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, происходящих с одинаковой угловой частотой  $\omega$ . Пусть за направления колебаний взяты оси  $x$  и  $y$ . Тогда уравнения колебаний запишутся

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (117.1)$$

где  $A_1$  и  $A_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – соответственно амплитуды и начальные фазы первого и второго колебаний.

Определим уравнение траектории точки, для чего исключим из уравнений (117.1) время. Перепишем уравнение (117.1) в виде:

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1, \quad (117.2)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2. \quad (117.3)$$

Умножая (117.2) на  $\cos \varphi_2$  и (117.3) на  $\cos \varphi_1$  и беря их разность, получим

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)$$

или

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (117.4)$$

Умножая (117.2) на  $\sin \varphi_2$  и (117.3) на  $\sin \varphi_1$  и снова беря разность, получим

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)$$

или

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (117.5)$$

Возводя в квадрат (117.4) и (117.5) и складывая почленно, получим

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

или

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (117.6)$$

Выражение (117.6) является уравнением траектории материальной точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковой частотой. Оно представляет собой уравнение эллипса, характеристики которого определяются значением разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ .

Пусть разность этих фаз

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi m, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда уравнение траектории (117.6) примет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2 \frac{xy}{A_1 A_2} = 0$$

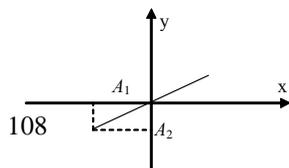
или

$$\left( \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} x, \quad (117.7)$$

т.е. мы получили уравнение семейства прямых, проходящих через начало координат (рис. 117.1).



При разности фаз

Рис. 117.1

$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2 \pm 2\pi m$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

уравнение (117.6) переходит в

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (117.8)$$

т.е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебания.

Если величина полуоси вдоль оси  $y$  меньше, чем вдоль оси  $x$  (рис. 117.2,а,  $A_2 < A_1$ ), то эллипс сплюснутый; и наоборот (рис. 117.2,б,  $A_2 > A_1$ ) – эллипс вытянутый. При равенстве амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  эллипс вырождается в окружность.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектории результирующего движения имеют вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Форма фигуры Лиссажу определяется соотношением частот и разностью начальных фаз складываемых колебаний, что наглядно видно из приведенной таблицы (рис. 117.3, здесь  $A_1 = A_2$ ).

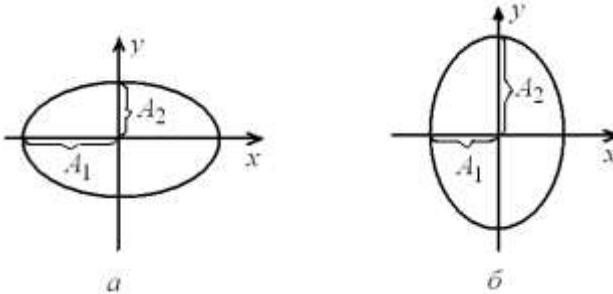


Рис. 117.2

$\omega_1/\omega_2$	$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi$
---------------------	-----------------------------	---------	---------	----------	-------

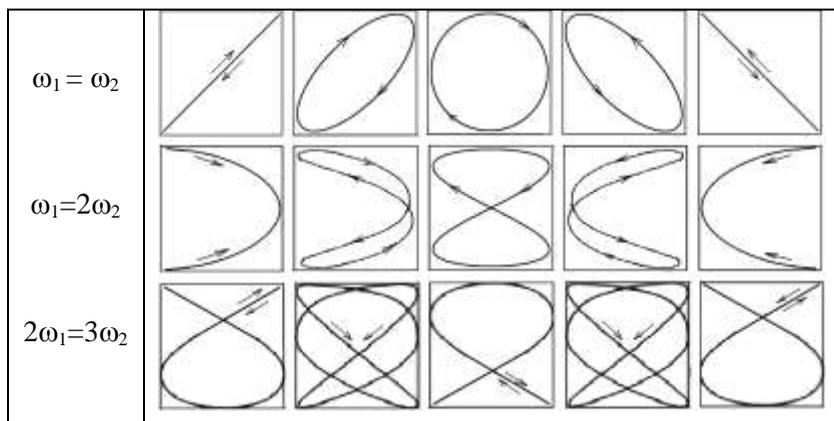


Рис.117.3

Фигура Лиссажу остается устойчивой, если отношение частот взаимно перпендикулярных колебаний представляет собой рациональное число, в противном случае траектории не повторяются и вид фигуры Лиссажу непрерывно изменяется.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Если частота одного из взаимно перпендикулярных колебаний известна, то по виду фигуры можно определить частоту другого колебания, пользуясь соотношением

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_x}{n_y}, \quad (117.9)$$

где  $\omega_x$  и  $\omega_y$  – угловые частоты колебаний соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $n_x$  и  $n_y$  – число точек пересечения фигуры Лиссажу с осями  $x$  и  $y$ .

Соотношение выражает тот факт, что чем больше угловая частота колебаний вдоль оси  $x$ , тем чаще колеблющаяся точка пересекает ось  $y$  и соответственно больше величина  $n_y$ , и наоборот. Так как  $\omega = 2\pi\nu$ , то соотношение (117.9) можно записать в виде

$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{n_x}{n_y}. \quad (117.10)$$

Сравнение частот можно произвести осциллографическим методом, подавая на горизонтально отклоняющие пластины электронного осциллографа пониженное напряжение из сети переменного тока с частотой  $\nu_x = 50$  Гц, а на вертикально отклоняющие пластины исследуемое напряжение с частотой  $\nu_y$  со звукового генератора. При сложении взаимно перпендикулярных электрических колебаний фигуры Лиссажу наблюдаются на экране осциллографа. Частота напряжения  $\nu_y$  определяется по формуле

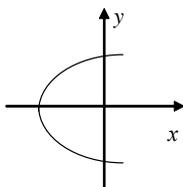


Рис. 117.4

вытекающей из соотношения (117.10).

$$\nu_y = \nu_x \frac{n_y}{n_x}, \quad (117.11)$$

Пусть фигура Лиссажу имеет вид, изображенный на рис. 117.4.

Число точек пересечения фигуры с осями  $X$  и  $Y$ ,  $n_x = 1$  и  $n_y = 2$ . В соответствии с формулой (117.11) на вертикально отклоняющие пластины осциллографа подается переменное напряжение с частотой  $\nu_y = 100$  Гц, меняющееся по гармоническому закону. Если ось проходит через точку пересечения ветвей фигуры, то при подсчете значений  $n_x$  и  $n_y$  эту точку учитывают дважды. Во избежание ошибки в этом случае оси  $X$  и  $Y$  можно параллельно самим себе переносить из центра координат. Пользуясь формулой (117.11), по виду фигур Лиссажу можно проградуировать шкалу частоты колебаний звукового генератора.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Собрать схему в соответствии с рис. 117.5, где 1 – осциллограф, 2 – звуковой генератор.

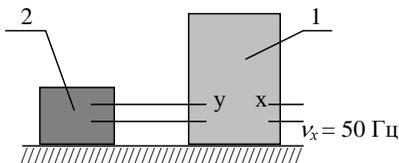


Рис. 117.5

2. Выключить генератор развертки осциллографа (переключатель «Диапазон частот» в положении ВЫКЛ) и установить ручки усиления по осям  $x$  и  $y$  на нуль. Ручку звукового генератора «Регулировка выхода» также установить на нуль, переключатель «Множитель частот» – в положение «1».
3. Включить в сеть звуковой генератор, осциллограф. Сфокусировать и вывести световое пятно в центр координатной сетки осциллографа.
4. Вращая ручку осциллографа «Усиление по оси  $X$ », добиться горизонтальной линии на экране  $\frac{1}{2}$  шкалы.
5. Вращением ручки звукового генератора «Регулировка выхода» добиться появления фигуры Лиссажу.
6. Вращая ручку частоты звукового генератора от начала шкалы, добиться появления устойчивой фигуры. Фигуры переписать и по формуле (117.11) определить частоту колебаний генератора  $\nu_y$ . Проверить, соответствует ли значение  $\nu_y$  показанию лимба звукового генератора  $\nu_{\text{лимба}}$ .
7. Оценить абсолютные и относительные ошибки в отсчетах частоты по лимбу звукового генератора.
8. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 117.1*

№	$\nu_x$	вид фигуры	$n_x$	$n_y$	$\nu_y$	$\nu_{\text{лимба}}$	$\Delta \nu$	$E$
	$\text{с}^{-1}$				$\text{с}^{-1}$	$\text{с}^{-1}$	$\text{с}^{-1}$	%

**Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Опишите рабочую установку, указав назначение звукового генератора и электронного осциллографа.
3. Запишите рабочую формулу с пояснением величин, входящих в нее.
4. Что называют фигурами Лиссажу? Как определяют частоту колебаний звукового генератора по форме фигур Лиссажу?

## Вопросы для защиты работы

1. Запишите уравнение гармонического колебания и поясните смысл входящих в него величин.
2. Получите уравнение траектории результирующего движения, получаемого при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.
3. Исследуйте полученное уравнение в зависимости от разности фаз складываемых колебаний и амплитуд.
4. Чем определяется форма фигур Лиссажу?
5. Зарисуйте вид наблюдаемых фигур Лиссажу и дайте по ним расчет частоты колебаний звукового генератора.

### Лабораторная работа № 118

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ РЕЗОНАНСА

*Цель работы:* ознакомление с резонансным методом определения скорости звука.

*Приборы и принадлежности:*

металлическая трубка с подвижным поршнем,  
электронный осциллограф,  
звуковой генератор,  
измерительная линейка,  
микрофон.

### Общие теоретические сведения

Как известно из курса физики, колеблющееся тело (камертон, струна, мембрана), находящееся в упругой среде, приводит в колебательное движение соприкасающиеся с ним частицы среды: атомы, молекулы и другие механические возмущения, возникающие в упругой среде. Вследствие чего в прилегающих к этому телу элементах среды возникают периодические деформации (например, растяжения или сжатия среды) и ведут к возникновению упругих сил, которые стремятся вернуть элементы среды в первоначальное состояние равновесия, то есть возникают упругие колебания среды.

Так как соседние элементы среды взаимодействуют друг с другом, то эти упругие деформации будут передаваться от од-

них участков среды к другим. *Колебания (возмущения), распространяющиеся в упругой среде во времени называются механическими волнами.* Волны могут быть *продольными*, когда частицы среды колеблются вдоль линии, совпадающей с направлением распространения колебания; и *поперечными*, когда частицы колеблются перпендикулярно к направлению распространения волны. В жидкостях и газах возникают только продольные волны, распространяющиеся в виде чередующихся сжатий и растяжений среды.

*Поверхность, до которой доходит колебание в некоторый момент времени, называется фронтом волны.* Поверхность волны, в которой все частицы колеблются в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Для изотропной среды волновой фронт и волновая поверхность совпадают. Если частица упругой среды в точке  $O$  совершает колебательное движение по закону (рис.118.1)

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (118.1)$$

где  $\xi(x, t)$  – смещение частицы среды от положения равновесия;  $A$  – амплитуда (наибольшее смещение частицы среды от положения равновесия);  $t$  – время;  $T$  – период;  $\omega = 2\pi/T$  – циклическая или круговая частота;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебания; то в соседнюю точку  $B$  среды придет колебательное движение с некоторым запаздыванием на время

$$\tau = \frac{x}{v},$$

где  $x$  – расстояние, на которое распространилось колебание от точки  $O$  до  $B$ .  $v$  – скорость распространения волны (фазовая скорость волны).

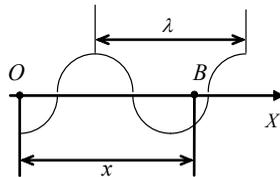


Рис. 118.1

Уравнение смещений частицы среды в точке  $B$  запишется

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos(\omega t - \frac{\omega x}{v}), \quad (118.2)$$

при условии  $\varphi_0 = 0$ .

Это общее уравнение бегущей слева направо плоской синусоидальной волны. Оно определяет для любого момента време-

ни  $t$  отклонение от положения равновесия колеблющихся частиц, находившихся в покое на расстоянии  $x$  от начала отсчета. Расстояние  $\lambda$ , пройденное волной (определенной фазой колебания) за один период колебания, называется длиной волны, т.е. длина волны – кратчайшее расстояние между соседними частицами среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}, \quad v = \lambda\nu, \quad (118.3)$$

где  $\nu$  – частота колебания частиц среды.

Частоты колебаний  $\nu$  частиц среды имеют ту же частоту, что и частота колебаний источника волн. Волны, частоты колебаний частиц которых лежат в пределах от 16 до 20000 Гц, называются звуковыми.

Звуковые волны в газах и жидкостях являются продольными и могут распространяться только в упругой среде.

Звуковые волны, как и электромагнитные, обладают рядом свойств: интерференцией, дифракцией, отражением и т.д.

*Интерференцией механических волн называется явление усиления или ослабления колебаний, которые происходят в результате наложения двух или нескольких когерентных волн. Когерентными называются волны, распространяющиеся в среде с одинаковой частотой и с постоянной по времени разности фаз.*

*Частным случаем интерференции волн являются стоячие волны, которые образуются при наложении двух встречных волн с одинаковой амплитудой и частотой. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преграды.*

Предположим, что две плоские волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются вдоль оси  $X$  в противоположных направлениях. Если начало координат взять в такой точке, в которой встречные волны имеют одинаковую фазу, и выбрать отсчет времени так, чтобы начальные фазы оказались равными нулю, то уравнение обеих плоских волн можно написать в следующем виде. Для волны, идущей в сторону положительной оси  $X$

$$\xi_1 = A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

и для волны, идущей в сторону отрицательной оси  $X$

$$\xi_2 = A \cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right).$$

Сложение этих двух волн дает

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + A \cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$

или, раскрывая значения косинусов от сложных аргументов и производя сокращения, получим уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos 2\pi \nu t. \quad (118.4)$$

Множитель  $2A \cdot \cos 2\pi x/\lambda$ , не зависящий от времени  $t$ , выражает амплитуду  $B$  стоячей волны, т.е.

$$B = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}. \quad (118.5)$$

Таким образом, амплитуда стоячей волны зависит от координаты  $x$ , определяющей положение колеблющейся частицы.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда стоячей волны обращается в нуль. Эти точки называются узлами стоячей волны.

Расстояние между соседними узлами или пучностями называется длиной стоячей волны ( $\lambda_{ст}$ ). Длина звуковой (бегущей) волны  $\lambda = 2\lambda_{ст}$ .

### Описание рабочей установки и метода измерений

В экспериментальной установке (рис.118.2), состоящей из звукового генератора 1 с телефоном 2, трубки 3 (в которой образуются стоячие волны) и подвижного поршня 4, звуковые волны

распространяются только вдоль трубки. Звуковые волны преобразуются в электрический сигнал и подаются на вертикальный вход электронного осциллографа 5.

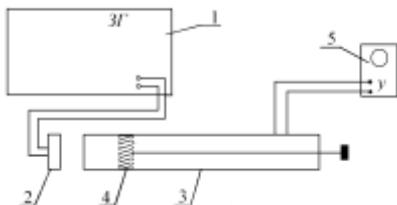


Рис. 118.2

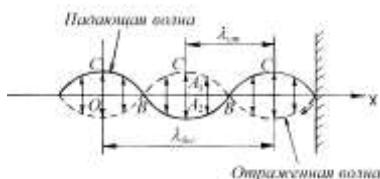


Рис. 118.3

Звуковые стоячие волны образуются: 1) из прямой волны (сплошная линия), идущей от телефона 2 к поршню 4 (рис. 118.3); 2) из отраженной (пунктир) от поршня 4 волны, фаза которой изменилась на  $\pi$ , так как отражение происходит от среды акустически более плотной. В данном случае при отражении произошла потеря полуволны. При определенных условиях в трубке 3 возникает акустический резонанс.

*Резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний в колебательной системе при приближении частоты внешней силы (вызывающей вынужденные колебания) к частоте какой-либо из собственных колебаний данной колебательной системы.* В данном случае имеем акустический резонанс, т.е. явление, при котором колебания столба воздуха в трубке достигают максимальной амплитуды. Это происходит тогда, когда частота звуковых колебаний мембраны (внешняя, вынуждающая сила) приближается к одной из собственных частот воздушного столба в трубке. Это частота называется резонансной частотой. При резонансной частоте звучание воздушного столба в трубке максимально.

Для наблюдения акустического резонанса нужно, чтобы столб воздуха в трубке 3 между поршнем 4 и открытым концом резонировал на звуковые волны, возбуждаемые источником звука – телефоном 2. Для этого необходимо, чтобы длина  $l$  столба воздуха в трубке между открытым концом и поршнем 4 удовлетворяла условию

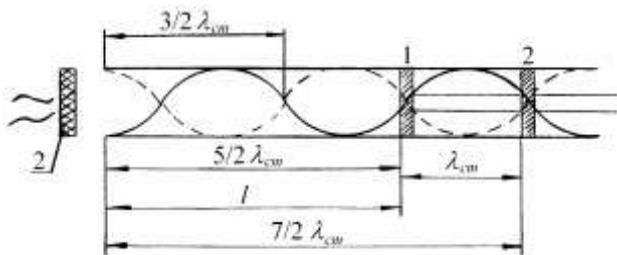
$$l = (2m - 1) \frac{\lambda_{cm}}{2},$$

где  $m = 1, 2, 3 \dots$

На рис.118.4 на длине  $l$  столба воздуха в трубке укладывается пять половин стоячей волны (при  $m = 3$ ).

В работе находят расстояние  $\delta l$  между двумя ближайшими положениями поршня – двумя соседними пучностями, соответствующими наибольшей громкости звука. На рис.118.4 показано положение поршня в двух узлах, например, 1 и 2. Так как длина стоячей звуковой волны  $\lambda_{ст} = \delta l$ , то длина искомой звуковой волны

$$\lambda = 2\lambda_{cm} = 2\delta l. \quad (118.6)$$



$$1) \delta l = \frac{7}{2} \lambda_{cm} - \frac{5}{2} \lambda_{cm} = \lambda_{cm} = \frac{\lambda_{\sigma_{\text{сез}}}}{2}.$$

$$2) \delta l = \frac{5}{2} \lambda_{cm} - \frac{3}{2} \lambda_{cm} = \lambda_{cm} = \frac{\lambda_{\sigma_{\text{сез}}}}{2}.$$

Рис. 118.4

Если постепенно отодвигать поршень от телефона, то можно добиться резонанса, т.е. максимального звучания воздушного столба, заключенного в трубке, и в трубке будет слышно последовательно усиление или ослабление звука. В трубке образуются стоячие волны, причем у поршня всегда будет узел, а у открытого конца – пучность. Зная длину звуковой волны  $\lambda$  и частоту  $\nu$ , которая указана на звуковом генераторе, определяют фазовую скорость распространения звуковой волны в воздухе по формуле

$$v = \lambda \nu = 2\delta l \nu \quad (118.7)$$

## Порядок выполнения работы и обработка результатов эксперимента

Излучателем звуковых волн в работе служит телефон ДЭМШ-1. На телефон подается переменное напряжение звуковой частоты от низкочастотного генератора ГЗ-102. Звуковые колебания воздуха преобразуются микрофоном МД-201 в электрический сигнал, подаваемый на вертикальный вход электронного осциллографа ЛО-70 (рис. 118.2).

Для получения звукового сигнала надо (только с разрешения преподавателя или лаборанта) включить генератор ГЗ-102 в сеть, затем поставить тумблер СЕТЬ в положение «ВКЛ» – при этом загорается сигнальная лампочка. Предварительно следует установить ручки на панели генератора: «множитель частот» – в положение 10, «регулировка напряжения» – в крайнее левое положение 50.

Дают генератору прогреться 15 минут, затем ручкой настройки устанавливают выходную частоту генератора 1500 Гц, ручкой «регулировка напряжения» стрелку вольтметра на панели прибора устанавливают в положение между делениями 5-6 на верхней шкале.

Включают в сеть осциллограф. Переключатель «диапазон частот» на панели осциллографа устанавливается в положение 2, ручка СИНХ – среднее положение. С помощью ручки «частота плавно» получают устойчивое изображение сигнала на экране. Затем приступают к измерениям.

Медленно и равномерно отодвигается поршень от телефона по шкале, нанесенной на штоке, последовательно отмечают и записывают положения  $l_i$ , при которых сигнал на экране осциллографа максимально усиливается.

Вычисляется расстояние  $\delta l = l_{i+1} - l_i$ . Следует найти не менее пяти значений  $\delta l$ .

1. По формуле (118.6) вычисляют длину звуковой волны для каждого из опытов, а по формуле (118.7) вычисляют фазовую скорость распространения звука (также для каждого опыта).

2. Находят среднюю скорость звука и подсчитывают абсолютную и относительную погрешности результата, исходя из среднего значения искомой величины.

3. Измерения повторяют при частоте 2000 Гц.

4. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу.

*Форма таблицы результатов 118.1*

$\nu$	$l_i$	$\delta l$	$\lambda$	$v$	$\langle v \rangle$	$\Delta v$	$\langle \Delta v \rangle$	$E$
Гц	м	м	м	м/с	м/с	м/с	м/с	%
1500								
2000								

**Вопросы для допуска к работе**

1. Какова цель работы?
2. Опишите метод нахождения длины звуковой волны в работе.
3. Запишите формулу для определения скорости звука в работе.
4. Оцените погрешность метода измерений скорости звука в работе.

**Вопросы для защиты работы**

1. Что называется механической волной? Какая волна является продольной? Поперечной?
2. Получите уравнение плоской бегущей волны.
3. Что называется интерференцией волн?
4. Выведите уравнение стоячей волны.
5. Что такое пучность, узел стоячей волны?
6. Какими свойствами обладают механические волны?
7. Что называется звуком?
8. От чего зависит скорость распространения звуковой волны в твердых, жидких, газообразных веществах? Выведите ее.
9. Выведите энергию и интенсивность бегущей волны.
10. Что называется высотой звука? От чего зависит громкость звука?
11. Что называется инфразвуком, ультразвуком? Расскажите об их применении.

Лабораторная работа № 119

## ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

*Цель работы:* изучение затухающих колебаний, определение логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления среды с помощью пружинного маятника.

*Приборы и принадлежности:*

пружинный маятник с миллиметровой шкалой,  
груз с лопаткой,  
сосуд с водой,  
секундомер.

### Общие теоретические сведения

В данной работе исследуются свободные затухающие колебания пружинного маятника.

Если на маятник не действуют диссипативные силы и упругие силы подчиняются закону Гука  $F_{упр} = -kx$ , то он будет совершать гармонические колебания. *Гармонические колебания – колебания, при которых физическая величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.*

Вывод уравнения, а также формул частоты, периода гармонического колебания пружинного маятника смотрите в лабораторной работе № 116. Любые реальные свободные колебания со временем затухают. Это связано с тем, что на колеблющуюся систему всегда действуют диссипативные силы (силы сопротивления, трения), которые нельзя исключить. Поэтому энергия

колеблющейся системы тратиться на работу диссипативных сил, т.е. система теряет энергию.

Пусть на пружинный маятник (систему) кроме упругой силы действует сила сопротивления:  $F_{\text{сопр}} = -r\upsilon$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления (зависит не только от свойств среды, но и от формы и размеров колеблющегося тела). Тогда уравнение движения груза пружинного маятника на основании II закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad (119.1)$$

где  $\ddot{x} = a$  – ускорение,  $\dot{x} = \upsilon$  – скорость груза.

Разделив уравнение (119.1) на массу груза  $m$  и введя обозначения  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания и  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – циклическая частота собственных колебаний маятника, получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (119.2)$$

Решение уравнения (119.2) может быть найдено в виде

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (119.3)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний,

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (119.4)$$

амплитуда затухающих колебаний.

График затухающих колебаний имеет вид:

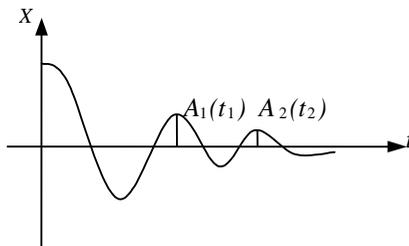


Рис.119.2

График амплитуды затухающих колебаний:

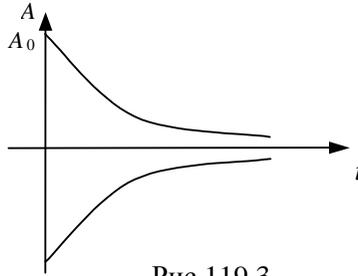


Рис.119.3

Частота и период затухающих колебаний пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad (119.5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} \quad (119.6)$$

Время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется временем релаксации  $\tau$ . Время релаксации  $\tau$  связано с коэффициентом затухания  $\beta$  соотношением

$$\beta = \frac{1}{\tau} \quad (119.7)$$

Как видно из выражения (119.7), коэффициент  $\beta$  – характеризует быстроту затухания колебаний.

Логарифм отношения амплитуды  $A_1(t)$  затухающих колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде  $A_2(t+T)$  колебаний через время, равное периоду  $T$  называется *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\delta = \ln \frac{A_1(t)}{A_2(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T = \frac{r}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} \quad (119.8)$$

При очень больших коэффициентах сопротивления  $r$  (когда  $k/m \ll r^2/4m^2$ ), несмотря на наличие сил, возвращающих систему в положение равновесия, колебания не возникают. Система возвращается в положение равновесия асимптотически (не переходя положения равновесия). Такое движение называется аperiодическим.

Определив на опыте две последующие амплитуды  $A_n$  и  $A_{n+1}$  и зная массу колеблющейся системы  $m$  и период затухающих колебаний  $T$ , можно вычислить коэффициент сопротивления среды по формуле

$$r = \frac{2m}{T} \delta = \frac{2m}{T} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}. \quad (119.9)$$

За время релаксации система совершает количество колебаний  $N = \tau/T$ . С учетом этого и выражения (119.7) логарифмический декремент затухания

$$\delta = \beta T = \frac{\beta \tau}{N} = \frac{1}{N},$$

т.е. логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, совершаемых системой за время, в течение которого амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз.

Затухание колебаний по экспоненциальному закону происходит в том случае, когда сила трения пропорциональна скорости. При этом отношение двух последовательных амплитуд (декремент затухания) остается постоянным. При других типах сил трения закон затухания будет иным. Во многих колебательных системах наряду с трением, пропорциональным скорости, присутствует и сухое трение. Поэтому на опыте часто получается, что отношение двух последовательных амплитуд не является постоянной величиной.

### **Описание рабочей установки и метода измерений**

Изучение затухающих колебаний с помощью пружинного маятника, часть колеблющейся системы которого помещена в вязкую среду, позволяет определить логарифмический декремент затухания и коэффициент сопротивления этой среды.

Логарифмический декремент затухания определяется по формуле (119.8). Но на практике обычно измеряют не две последовательные амплитуды  $A_n$  и  $A_{n+1}$ , а начальную амплитуду  $A_0$  и конечную амплитуду  $A_n$  через некоторое число колебаний  $n$ . В этом случае, поскольку отношение каждой предыдущей амплитуды к последующей в промежутке от  $A_0$  до  $A_n$  равно

$$\frac{A_0}{A_1} = \Delta, \quad \frac{A_1}{A_2} = \Delta, \dots, \frac{A_{n-1}}{A_n} = \Delta,$$

то

$$\frac{A_0}{A_n} = \frac{A_0}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \dots \frac{A_{n-1}}{A_n} = \Delta^n.$$

Следовательно:

$$\ln \frac{A_0}{A_n} = \ln \Delta^n = n \ln \Delta$$

Таким образом, для логарифмического декремента затухания  $\delta$  окончательно получим

$$\delta = \ln \Delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}, \quad (119.10)$$

где  $A_0$  – амплитуда начального колебания;  $A_n$  – амплитуда  $n$ -го колебания.

Зная логарифмический декремент затухания  $\delta$  и измерив период затухающих колебаний  $T$ , можно определить коэффициент  $r$  силы сопротивления

$$r = \frac{2m}{T} \delta. \quad (119.11)$$

### *Подготовка прибора к работе*

Под груз с лопаткой, висящей на пружине, подставляют сосуд с водой так, чтобы лопатка оказалась в воде. Передвигая кронштейн по высоте штатива (см.рис. 119.3), добиваются, что-

бы при спокойно висящем грузе поверхность воды пересекала середину стержня, соединяющего лопатку с грузом.

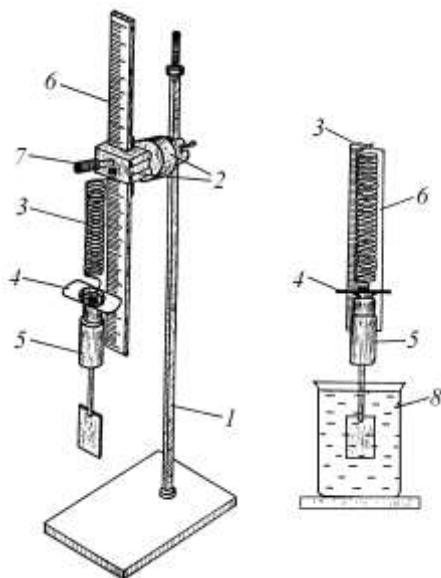


Рис. 119.3. Пружинный маятник:  
1 – штатив; 2 – кронштейн; 3 – пружина; 4 – указательная  
пластинка; 5 – груз с лопаткой; 6 – миллиметровая шкала;  
7 – винт, вращением которого можно перемещать  
миллиметровую шкалу; 8 – сосуд с водой.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Для измерения периода затухающих колебаний подвешенный на пружине груз с лопаткой (вместе с указательной пластинкой) вывести из положения равновесия, оттянув его вниз на 3 или 4 см, и отпускают. При колебаниях груз и указательная пластинка не должны цепляться за шкалу.

2. Секундомером измерить промежуток времени  $t$ , в течение которого груз совершает 30 или 40 полных колебаний.

3. **Внимание!** В момент остановки секундомера необходимо одновременно зафиксировать амплитуду последнего  $n$ -го колебания  $A_n$ . Данные занести в таблицу.

4. Для увеличения точности следует сделать 5-10 таких измерений с одним и тем же числом колебаний, задавая одну и ту же начальную амплитуду  $A_0$ .

5. В таблицу последовательно занести значения амплитуды начального колебания  $A_0$ , амплитуды  $n$ -го колебания  $A_n$  и значение времени  $t$  для 5-10 отдельных измерений. Затем находят среднюю амплитуду  $\langle A_n \rangle$ .

6. Определить среднее значение времени  $\langle t \rangle$  и по формуле

$$T = \frac{\langle t \rangle}{n}$$

рассчитать период затухающих колебаний системы.

7. По формуле (119.10) рассчитать логарифмический декремент затухания  $\delta$ .

8. По формуле (119.11) вычислить коэффициент  $r$  силы сопротивления вязкой среды. Масса груза с лопаткой  $m = 102,57$  г.

9. Используя дифференциальный метод, рассчитать относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta r$  погрешности коэффициента сопротивления. Данные занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 119.1*

№	$n$	$A_0$	$A_n$	$\langle A_n \rangle$	$t$	$\langle t \rangle$	$T$	$\delta$	$r$	$\Delta r$	$E$
		м	м	м	с	с	с		кг/с	кг/с	%

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Какие колебания называются гармоническими? Запишите уравнение гармонических колебаний и назовите величины, входящие в него.
3. Что называется декрементом затухания? Логарифмическим декрементом затухания?
4. Опишите установку и порядок выполнения работы.

5. Запишите рабочие формулы для определения логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления среды.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний и введите формулу периода колебаний пружинного маятника.

2. Почему реальные колебания являются затухающими? Получите дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

3. Решая дифференциальное уравнение, получите формулу амплитуды, частоты и периода затухающих колебаний. Представьте графически затухающие колебания.

4. Каков физический смысл коэффициента затухания  $\beta$ ?

5. Выведите рабочую формулу (119.16) для определения логарифмического декремента затухания. Каков его физический смысл?

6. Используя дифференциальный метод, получите формулу для расчета относительной погрешности коэффициента сопротивления  $r$ .

### Лабораторная работа № 120

### **ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

*Цель работы:* проверка закона сохранения механической энергии при скатывании тела с наклонной плоскости.

*Приборы и принадлежности:*  
наклонный желоб с миллисекундомером FPM-15, шарик.

### **Общие теоретические сведения**

Пусть скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно геометрической оси  $C$  (рис. 120.1). Будем предполагать, что тело скатывается без проскальзывания. Это означает, что скорость точек тела, соприкасающихся с поверхностью, по которой оно скользит (на рис. 120.1 точка  $A$ ), равна 0. Отсут-

ствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Эти силы сводятся к реакции наклонной плоскости  $N$ , равной по модулю силе нормального давления  $F_n$  и касательной силе трения  $F_\tau$ . При отсутствии скольжения сила  $F_\tau$  есть сила трения качения.

Пусть шар радиуса  $R$  и массой  $m$  скатывается с наклонной плоскости длиной  $l$ , образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Какова скорость центра масс (т. С) в конце плоскости?

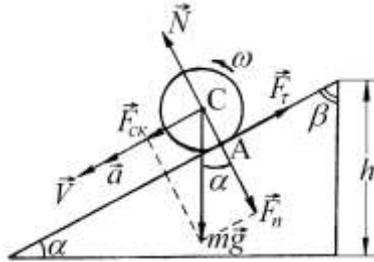


Рис. 120.1

Задачу о скатывании тела можно решить различными способами. Мы воспользуемся одним из них: применим закон сохранения механической энергии.

В замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы покоя, механическая энергия системы остается постоянной во времени, т.е.

$$E = E_k + E_n, \quad (120.1)$$

где  $E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$  – кинетическая энергия системы тел,  $E_n$  –

потенциальная энергия взаимодействия тел системы.

*Консервативными называются силы, работа которых при перемещении тела не зависит от пути перехода, а определяется только начальным и конечным положениями тела. Работа таких сил по любому замкнутому пути равна нулю. Консервативными являются силы всемирного тяготения, кулоновские силы, силы упругости и сила тяжести. Если же работа, совершаемая силой, зависит от формы траектории, то такие силы называются диссипативными; примером их является сила трения.*

Потенциальная энергия шара на верхнем конце плоскости

$$E_n = mgh = mgl \sin \alpha. \quad (120.2)$$

Кинетическая энергия на нижнем конце плоскости равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (120.3)$$

где  $V$  – скорость поступательного движения центра масс шара.

При отсутствии скольжения скорость центра масс  $V$  связана с угловой скоростью  $\omega$  вращения тела соотношением  $V = r\omega$ . Момент инерции однородного шара относительно оси (С), проходящей через центр масс,  $J = \frac{2}{5}mr^2$ . Поэтому формулу (120.3) можно переписать следующим образом

$$E_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\left(\frac{V}{r}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mV^2 = \frac{7}{10}mV^2. \quad (120.4)$$

Приравняв (120.2) и (120.4) находим выражение для скорости движения центра масс шара в нижнем конце плоскости:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gl \sin \alpha}. \quad (120.5)$$

Формула (120.5) справедлива в случае, если не учитывать силы сопротивления воздуха и трения качения. Значения этих сил малы.

Из кинематики известно, что при равноускоренном поступательном движении путь и скорость тела определяются на основании следующих выражений:

$$l = V_0t + \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad V = V_0 + at.$$

Учитывая, что скорость тела в начальный момент времени равна нулю ( $V_0 = 0$ ), получим еще одно выражение для скорости в нижнем конце плоскости

$$V_{\text{пров}} = \frac{2l}{t}. \quad (120.6)$$

То есть, измерив время  $t$ , в течение которого центр масс шарика, скатывающегося с наклонной плоскости, пройдет путь  $l$ , легко вычислить его скорость в конце пути. Формула (120.6) будет являться проверочной при определении скорости движения центра масс шара по формуле (120.5), полученной на основании закона сохранения механической энергии. Таким образом, мы осуществим проверку закона сохранения механической энергии при скатывании тела с наклонной плоскости.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Для определения скорости шара по формулам (120.4) и (120.5) используется наклонный желоб с миллисекундомером ФРМ-15, общий вид которого представлен на рис. 120.2.

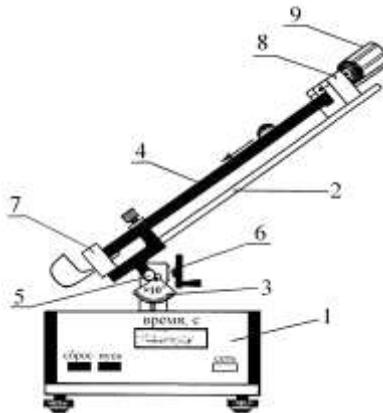


Рис. 120.2. Наклонный желоб

В основание измерительной установки вмонтирован миллисекундомер  $1$ . К кронштейну  $2$  прикреплена шкала  $3$  для установки угла  $\beta$ . Для наклона желоба  $4$  и его фиксации при заданном угле используются винт  $5$  и маховик  $6$ . При скатывании шарика по желобу миллисекундомер включается и выключается автоматически с помощью фотоэлектрических датчиков  $7$  и  $8$ , установленных в начале и конце желоба  $4$ . При включении при-

бора в сеть электромагнит 9, установленный в верхней части кронштейна 2, удерживает шарик в состоянии покоя. Установка сконструирована так, что при нажатии клавиши ПУСК отключение электромагнита происходит одновременно с включением миллисекундомера. Для включения электромагнита необходимо отжать клавишу ПУСК (вернуть в исходное положение).

### **Порядок выполнения работы и обработка результатов эксперимента**

1. Установить заданный преподавателем угол наклона желоба  $\alpha$  с горизонтом ( $30^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ ). Для этого по шкале 3 устанавливают угол  $\beta$  ( $\alpha = \pi/2 - \beta$ , см.рис. 120.2). Для наклона желоба и его прочной фиксации при заданном угле необходимо сначала ослабить винт 5, затем с помощью маховика 6 установить угол  $\beta$  по шкале 3 и окончательно зафиксировать его, затянув винт 5 до упора.

2. Подключить сетевой кабель прибора к сети питания.

3. Нажать клавишу СЕТЬ, проверяя, все ли индикаторы миллисекундомера высвечивают нуль и светят ли лампочки обоих фотоэлектрических датчиков.

4. С помощью электромагнита шарик зафиксировать в верхнем конце желоба.

5. Нажать клавишу ПУСК.

6. Записать показания миллисекундомера в таблицу результатов.

7. Для повторного измерения необходимо прибор вернуть в исходное состояние: нажать клавишу СБРОС и отжать клавишу ПУСК.

8. Опыт повторить 5-10 раз и определить среднее значение времени движения  $\langle t \rangle$ .

9. По формуле (120.4), зная угол наклона желоба с горизонтом  $\alpha$  и путь  $l$ , пройденный шариком между двумя фотоэлектрическими датчиками ( $l = 0,47$  м), найти скорость шара  $V$  в конце пути.

10. Подставив среднее значение времени  $\langle t \rangle$  в проверочную формулу (120.5), рассчитать скорость  $V_{\text{пров}}$ .

11. Оценить относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta V$  погрешности измерений по формулам, полученным дифференциальным методом

$$E_1 = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right), \quad E_2 = \frac{\Delta V_{\text{пров}}}{V_{\text{пров}}} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta t}{t}.$$

Данные результатов измерений и вычислений занести в таблицу.

*Форма таблицы результатов 120.1*

№	$\beta$	$\alpha$	$l$	$t$	$\langle t \rangle$	$V$	$V_{np}$	$\Delta V$	$E_1$	$\Delta V_{np}$	$E_2$
	град	град	м	с	с	м/с	м/с	м/с	%	м/с	%

### Вопросы для допуска к работе

1. Какова цель работы?
2. Опишите устройство рабочей установки и ход эксперимента.
3. Запишите рабочую и проверочную формулы, поясните их.

### Вопросы для защиты работы

1. Какие силы приводят к отсутствию скольжения при скатывании тела с наклонной плоскости? Укажите их на чертеже.
2. Сформулируйте закон сохранения механической энергии
3. Какие силы называются консервативными?
4. Какие силы называются консервативными? Диссипативными? Приведите примеры этих сил.
5. Поясните физический смысл силы трения сцепления  $F_{\tau}$ , и почему при отсутствии скольжения выполняется закон сохранения механической энергии.
6. Пользуясь законом сохранения механической энергии, получите формулу для расчета скорости шарика.
7. Используя дифференциальный метод, получите формулу для расчета относительной погрешности  $\Delta V/V$ .

Лабораторная работа № 121

## **ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ КРИВОЙ**

*Цель работы:* определение момента инерции твердых тел и экспериментальная проверка справедливости теоремы Штейнера на примере физического маятника.

*Приборы и принадлежности:*  
универсальный маятник ФРМ–04.

### **Общие теоретические сведения**

Моментом инерции механической системы относительно неподвижной оси вращения является физическая величина  $J$ , равная сумме произведения масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (121.1)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -ой точки;  $r_i$  – расстояние от  $i$ -ой точки до оси.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу, где интегрирование производится по всему объему тела

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (121.2)$$

где  $dm$  – масса малого объема  $dV$ ,  $\rho$  – плотность;  $r$  – расстояние от элемента  $dV$  до оси вращения.

Если тело однородно, то его плотность всюду одинакова. Тогда

$$J = \rho \int_V r^2 dV . \quad (121.3)$$

Для вращательного движения момент инерции является мерой инертности твердого тела.

Момент инерции  $J$  тела относительно какой-либо оси зависит не только от массы, формы и размеров тела, но также от положения тела по отношению к этой оси.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера. Согласно теореме Штейнера, момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_0$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $\ell$  между осями:

$$J = J_0 + m\ell^2 \quad (121.4)$$

В таблице 121.1 приведены выражения моментов инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей.

*Форма таблицы результатов 121.1*

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
1. Полый тонкостенный цилиндр (обруч, кольцо) радиуса $R$	Ось симметрии	$mR^2$
2. Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
3. Прямой тонкий стержень длиной $\ell$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}m\ell^2$
4. Прямой тонкий стержень длиной $\ell$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}m\ell^2$
5. Шар радиусом $R$	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Проверить правильность теоремы Штейнера и определить момент инерции можно с помощью физического маятника.

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной оси, не проходящей через его центр масс.

В данной работе физический маятник – это цилиндрический стальной стержень (см. рис. 121.1). Точка  $A$  является центром масс,  $OA = \ell$  – расстояние от центра масс до точки подвеса маятника. Силу тяжести  $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$  можно разложить на составляющие, одна из которых  $\vec{F}_2$  уравнивается реакцией подвеса  $\vec{R}$ . Под действием другой составляющей  $\vec{F}_1$  маятник приходит в движение. На основании второго закона Ньютона для динамики вращательного движения запишем:

$$M = J\mathcal{E}, \quad (121.5)$$

где  $M$  – момент вращающей составляющей силы  $\vec{F}_1$ ;  $\mathcal{E}$  – угловое ускорение.

$$M = F_1\ell, \quad (121.6)$$

где  $\ell$  – плечо силы  $\vec{F}_1$ .

$$F_1 = mg \sin \varphi. \quad (121.7)$$

При малых углах отклонения маятника  $(3-5)^\circ \sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда

$$F_1 = -mg\varphi. \quad (121.8)$$

Знак «минус» выбран потому, что составляющая силы  $\vec{F}_1$  направлена в сторону, противоположную положительному направлению отклонения маятника.

С учетом (121.5) и (121.8) имеем:

$$J\mathcal{E} = -mg\varphi. \quad (121.9)$$

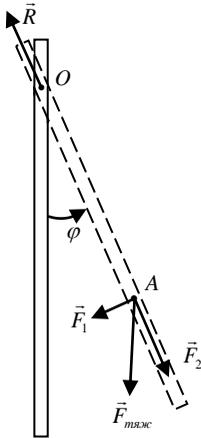


Рис. 121.1

Учтем, что угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . Моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь, так как маятник совершает 50-60 колебаний без заметного затухания.

Подставляя выражение углового ускорения через вторую производную от угла отклонения маятника по времени в уравнении (121.9), получим дифференциальное уравнение колебаний физического маятника

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\ell\varphi = 0, \quad (121.10)$$

Решением этого дифференциального уравнения является следующая функция:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha_0),$$

где  $\varphi(t)$  – угол отклонения маятника в данный момент времени;  $\varphi_0$  – максимальное отклонение – амплитуда колебания;  $\omega$  – угловая частота ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  – период колебаний);  $\alpha_0$  – начальная фаза в момент времени  $t = 0$ .

Для малых углов отклонения

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}. \quad (121.12)$$

Период колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}}. \quad (121.13)$$

Из выражения (121.13) получим для момента инерции физического маятника

$$J = \frac{T^2 mg\ell}{4\pi^2}. \quad (121.14)$$

Тогда, зная ускорение свободного падения  $g$ , массу  $m$ , экспериментально измерив  $\ell$  и определив период колебаний  $T$ ,

можно вычислить момент инерции маятника. Сняв зависимость  $J$  от  $\ell$ , можно проверить справедливость теоремы Штейнера.

### Описание рабочей установки и метода измерений

Зависимость  $J = f(\ell)$ , как следует из выражения (121.4), нелинейная. Единственным графиком, по внешнему виду которого можно однозначно судить о характере исследуемой зависимости, является прямая линия. Поэтому при проверке каких-либо закономерностей используют метод линеаризации экспериментальной кривой.

Суть метода заключается в том, что в проверяемой закономерности необходимо выявить такие новые переменные, зависимость между которыми была бы линейной. В данном случае такими переменными являются  $J$  и  $\ell^2$ . Следовательно, для проверки соотношения (121.4) необходимо строить график экспериментальной зависимости  $J = f(\ell^2)$ .

Если через экспериментальные точки можно провести прямую линию, т.е. экспериментальная зависимость  $J = f(\ell^2)$  является линейной, значит, правильность соотношения (121.4) подтверждена экспериментально (рис. 121.2).

Используя график линеаризованной зависимости

$J = f(\ell^2)$ , можно вычислить массу стержня и собственный момент инерции. Для этого сравним уравнение (121.4) с уравнением прямой:

$$J = J_0 + m\ell^2 \quad \text{и} \quad y = b + ax,$$

где  $a$  – угловой коэффициент;  $b$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси  $y$ .

Угловой коэффициент определяется как

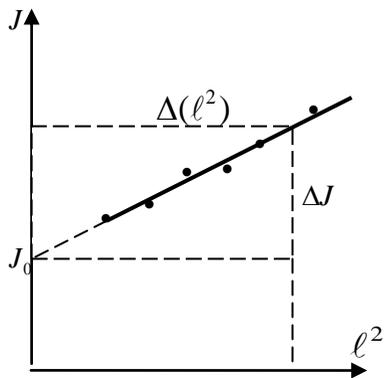


Рис. 121.2.

Зависимость момента инерции твердого тела от квадрата расстояния от оси вращения до центра масс

$$a = \Delta y / \Delta x,$$

где  $\Delta x$  – приращение аргумента;  $\Delta y$  – соответствующее приращение функции. В нашем случае  $a = m = \frac{\Delta J}{\Delta(\ell^2)}$ ,  $b = J_0$ .

Для экспериментальной проверки теоремы Штейнера и определения момента инерции в данной работе используется стандартная установка универсального маятника FPM-04. Это настольный прибор (рис. 121.3), на вертикальной стойке основания 1 которого крепится кронштейн 2, который имеет возможность поворота вокруг стойки на  $360^0$  и фиксации в любом выбранном положении. С одной стороны кронштейна 2 подвешен математический маятник 3, а с другой – физический. Физический маятник – стальной стержень 5, подвешенный на опорной призме 6, которая может перемещаться по всей длине стержня и фиксироваться в требуемом положении.

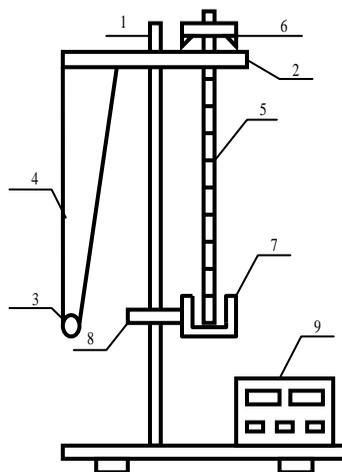


Рис. 121.3. Общий вид установки FPM-04

Стержень 5 имеет кольцевые проточки, которые служат для надежной фиксации опорных призм. Установка снабжена фотоэлектрическим датчиком 7, который закреплен на вертикальной стойке с помощью кронштейна 8 и имеет возможность перемещаться как вдоль, так и вокруг стойки и фиксироваться в любом

положении. Датчик предназначен для выдачи сигналов на миллисекундомер 9. Миллисекундомер выполнен самостоятельным прибором с цифровой индикацией времени и количеством полных периодов колебания маятника.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов эксперимента

1. Определяют центр тяжести физического маятника. Физический маятник представляет собой однородный стержень.

2. Устанавливают опорную призму на физический маятник в крайнее положение, закрепляя ее с помощью винта. Острое ребро опорной призмы является осью качания. Определяют расстояние  $\ell$  между центром масс и осью качания. Данные заносят в таблицу.

*Форма таблицы результатов 121. 2*

	№	$n$	$\ell$ , м	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$T$ , с	$\ell^2$ , м <sup>2</sup>	$J$ , кг·м <sup>2</sup>	$m$ , кг
I.	1 2 3 4 5								0,350
II.	1 2 3 4 5								
III.	1 2 3 4 5								
IV.	1 2 3 4 5								
V.	1 2 3 4 5								

VI.	1								
	2								
	3								
	4								
	5								

3. Устанавливают кронштейн 8 вместе с фотоэлектрическим датчиком 7 так, чтобы конец стержня маятника перекрывал световой луч, поступающий от лампочки на фотодатчик.

4. Отклоняют маятник на угол  $\varphi = 5^0 - 6^0$  от положения равновесия, после чего нажимают клавишу СБРОС на миллисекундомере.

5. После подсчета измерителем 10 колебаний нажимают клавишу СТОП. По показаниям секундомера определяют продолжительность 10 колебаний. Измерение повторяют не менее 5 раз. Данные заносят в таблицу.

6. По формуле  $T = \frac{\langle t \rangle}{n}$  рассчитывают среднюю величину периода колебаний маятника, где  $\langle t \rangle$  – средняя продолжительность 10 колебаний;  $n$  – число колебаний.

7. Изменяют расстояние  $\ell$ , опуская опорную призму вниз на четыре деления и вновь проводят измерения (см. п. 4 – 6).

8. Изменяя  $\ell$ , повторяют опыт шесть раз. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу.

9. По формуле (121.14) рассчитывают значения момента инерции  $J$ .

10. Используя результаты измерений и вычислений (см. таблицу 121.2) строят зависимость  $J = f(\ell^2)$ .

11. Из графика определяют собственный момент инерции  $J_0$  относительно оси, проходящей через его центр масс.

12. По проверочной формуле  $J_{\text{прог}} = \frac{1}{12} m \ell^2$ , рассчитывают  $J_0$  и сравнивают результаты расчета и опыта.

13. Из графика  $J = f(\ell^2)$  определяют массу стержня  $m = \frac{\Delta J}{\Delta(\ell^2)}$  и сравнивают с указанной в таблице.

14. Оценивают погрешность при определении  $J_0$  и  $m$ .

### **Вопросы для допуска к работе**

1. Сформулируйте цель работы.
2. Дайте определение физическому маятнику.
3. Запишите формулу для определения момента инерции физического маятника.
4. Как, используя метод линеаризации экспериментальной кривой, можно проверить справедливость теоремы Штейнера?

### **Вопросы для защиты работы**

1. Как записывается основной закон динамики вращательного движения?
2. Как формулируется понятие момента инерции материальной точки и твердого тела?
3. Является ли момент инерции аддитивной величиной?
4. Как формулируется теорема Штейнера? В каких ситуациях эта теорема применима?
5. Выведите рабочую формулу для определения момента инерции физического маятника.
6. Проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы.

**Приложение**  
(образец оформления отчета)

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
Высшего профессионального образования  
«Братский государственный университет»

*Кафедра физики*

Лабораторная работа № 104

**Определение модуля кручения и модуля сдвига  
с помощью крутильного маятника**

ОТЧЕТ

Выполнил:  
студент гр. ЛИД-09

А.В. Иванов

Руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент

И.В. Петров

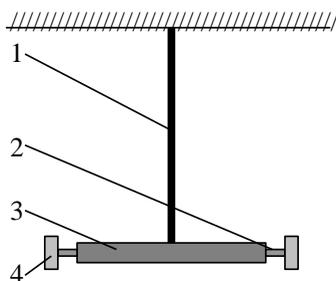
Братск 2010

**Цель работы:** экспериментальное определение модуля кручения и модуля сдвига стальной проволоки методом крутильных колебаний.

**Приборы и принадлежности:**

крутильный маятник,  
секундомер (ц.д. = 0,01 с),  
штангенциркуль (ц.д. = 0,05 мм),  
измерительная линейка (ц.д. = 1 мм).

### Принципиальная схема рабочей установки



1 – стальная проволока; 2 – горизонтальный стержень со средним грузом 3; 4 – подвижные грузы массой  $m$  каждый, которые можно перемещать вдоль стержня 2.

**Рабочие формулы:**

$$D = \frac{8\pi^2 m (l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}, \quad G = \frac{2DL}{\pi R^4},$$

где  $D$  – модуль кручения проволоки;  $m$  – масса подвижного груза;  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния от оси вращения до центра подвижного груза в первом и во втором положениях;  $G$  – модуль сдвига;

$L$  – длина проволоки,  $R$  – ее радиус;  $T_1$  и  $T_2$  – периоды колебаний маятника, определяемые по формулам:

$$T_1 = \frac{\langle t_1 \rangle}{n}, \quad T_2 = \frac{\langle t_2 \rangle}{n},$$

здесь  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$  – средние значения времени;  $n$  – число колебаний.

*Форма таблицы результатов 104.1*

$n$	$m$	$l_1$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$T_1$	$l_2$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$T_2$	$\langle D \rangle$	$r$	$\langle G \rangle$	$\Delta D$	$\Delta G$
	кг	м	с	с	с	м	с	с	с	Н·м	м	Н/м <sup>2</sup>	Н·м	Н/м <sup>2</sup>
70	0,381	0,11	61,92 61,84 61,90 61,82 61,78	61,85	0,88	0,24	103,05 102,91 102,73 102,85 102,96	102,9	1,47	1,01	$2 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{10}$	0,02	$0,5 \cdot 10^{10}$

**Формулы расчета погрешностей:**

$$1) E_1 = \frac{\Delta D}{D} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{l_1 \Delta l_1 + l_2 \Delta l_2}{l_2^2 - l_1^2} + 2 \frac{T_1 \Delta T_1 + T_2 \Delta T_2}{T_2^2 - T_1^2};$$

$$\Delta T_1 = \frac{\Delta t_1}{n}; \quad \Delta T_2 = \frac{\Delta t_2}{n}. \quad \Delta T_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad \Delta T_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

$$E_1 = 2 \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3,14} + \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{0,381} + 2 \frac{(0,11 + 0,24) 0,5 \cdot 10^{-3}}{0,0576 - 0,0121} + 2 \frac{(0,88 + 1,47 \cdot 2) 10^{-3}}{2,1609 - 0,7744} \approx$$

$$\approx 0,018; \quad \Delta D = E_1 D; \quad \Delta D = 0,018 \cdot 1,013 \approx 0,02 \text{ (Н·м)}.$$

$$2) E_2 = \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 4 \frac{\Delta R}{R}; \quad \Delta G = E_2 G.$$

$$E_2 = \frac{0,02}{1,013} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,82} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3,14} + 4 \frac{0,025 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,072;$$

$$\Delta G = 0,072 \cdot 7,34 \cdot 10^{10} \approx 0,5 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}.$$

**Конечный результат:**

$$D = (1,01 \pm 0,02) \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad G = (7,3 \pm 0,5)10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

**Вывод:**

Методом крутильных колебаний определили модуль кручения и модуль сдвига стальной проволоки. Погрешность измерения модуля кручения составила примерно 2 %, а модуля сдвига – 7 %.

**Дмитрий Борисович Ким**  
**Александр Алексеевич Кропотов**  
**Ирина Геннадьевна Махро**

**Физика.**  
**Механика**

**Лабораторный практикум**

---

Подписано в печать  
Формат 60 × 84 1/16  
Печать трафаретная.  
Уч.-изд. л. 9,0. Усл. печ. л. 9,0.  
Тираж 300 экз. Заказ

Отпечатано в издательстве БрГУ  
665709, Братск, ул. Макаренко, 40